

① Successioni per ricorrenza	Teoria 5 %	Es. 35 %
② Liminf / limsup	60 %	40 %
③ Completezza / Compattezza	30 %	40 %
④ Da Weierstrass a Taylor	30 %	40 %
⑤ Uniforme continuità e moduli di cont.	50 %	50 %
⑥ Funzioni convesse	60 %	40 %
⑦ Volute ed eventuali	?	?

— o — o —

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$x_{n+1} = 2x_n + 3$ ← permette di calcolare un termine noto il termine precedente

$x_0 = 5$ ← grazie a questo valore calcolo i successivi.

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}^2$ noti 2 valori iniziali x_0 e x_1 ,
 ↑ ordine 2, cioè dipende da 2 termini precedenti

$x_{n+1} = 2x_n + 3^n$ ← succ. per ricorrenza di ordine 1 non autonoma
 (cioè la legge di passaggio varia al variare di n)

$x_{n+1} = f(x_n)$ succ. per ric. di ordine 1 autonoma
 $x_{n+1} = f(x_n, n)$ " " " " " non autonoma
 $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n)$ " " 2 " "

Obiettivi :

- ① Trovare la formula generale (chiusa) per calcolare x_n senza dover calcolare tutti i precedenti
- ② Studiare la successione (capire monotonia, limite, ...) senza avere la formula chiusa.

Caso lineare

Esempio 1 $x_{n+1} = 7x_n \leadsto x_1 = 7x_0, x_2 = 7x_1 = 7^2x_0, \dots$

$$x_n = 7^n x_0 \quad \leftarrow \text{banale induttione}$$

$$x_{n+1} = k x_n \leadsto x_n = k^n x_0$$

Esempio 2 $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4x_n$

Provo a vedere se ci sono succ. esponenziali che la risolvono

$$x_n = k^n. \text{ Sostituisco: } k^{n+2} \stackrel{?}{=} 3k^{n+1} + 4k^n$$

$$\text{Semplifico } k^n \text{ e trovo } k^2 = 3k + 4, \text{ cioè}$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \quad (k-4)(k+1) = 0 \leadsto k=4 \text{ e } k=-1$$

Ci sono due succ. esponenziali che vanno bene

$$4^n, (-1)^n \quad \text{Ma allora va bene anche}$$

$$a 4^n + b (-1)^n \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti reali qualunque (sostituisce per credere)}$$

Ci sono altre soluzioni?

No! Per 2 osservazioni

Oss. 1 Ogni soluzione è univocamente determinata se conosco x_0 e x_1

Oss. 2 Esiste una succ. del tipo $a \cdot 4^n + b \cdot (-1)^n$ che prende una qualunque coppia iniziale x_0 e x_1 . Perché?

$$n=0$$

$$a+b = x_0$$

$$n=1$$

$$4a-b = x_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Det} \neq 0.$$

Teoria generale Data una ricorrenza lineare di ordine 2

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$$

la soluzione generale è del tipo

$$x_n = c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n$$

dove λ e μ sono le radici del polinomio caratteristico

$$x^2 - ax - b$$

Questo vale se le radici λ e μ sono distinte,

Dim. STEP 1 Tutte le x_n come sopra funzionano (banale sostituzione)

STEP 2 Fissati x_0 e x_1 esistono unici c_1 e c_2 per cui x_n prende quei valori iniziali.

Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{array}{l} n=0 \\ n=1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = x_0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 = x_1 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \quad \text{Det} \neq 0 \text{ se } \lambda \neq \mu$$

— o — o —

La stessa cosa vale per ricorrenze di ogni ordine purché le radici del polinomio caratteristico siano distinte.

— o — o —

Le molteplicità si trattano mettendo n davanti come nelle equazioni differenziali.

Esempio $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n \rightsquigarrow x^2 - 6x + 9 = 0$
 $\rightsquigarrow x = 3 \text{ con mult} = 2$

$$x_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n \quad (\text{sostituire e fare step 2 per vedere})$$

Esempio

$$a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$$

Approccio algebrico Invece di considerare a_n come incognita, considero (a_n, a_{n+1}) come incognita.

Anzi considero come incognita il polinomio

$$p_n(x) = a_n + a_{n+1}x$$

$$p_{n+1}(x) = a_{n+1} + a_{n+2}x$$

$$x p_n(x) = a_n x + a_{n+1} x^2 \quad \text{Nel caso di Fibonacci } x^2 = x + 1$$

$$\equiv a_n x + a_{n+1} x + a_{n+1}$$

$$= (a_n + a_{n+1})x + a_{n+1}$$

$$= a_{n+2}x + a_{n+1}$$

Quindi nel caso di Fibonacci $p_{n+1}(x) \equiv x \cdot p_n(x) \pmod{x^2 - x - 1}$

Quindi $p_n(x) \equiv x^n p_0(x) \pmod{x^2 - x - 1}$, cioè

$p_n(x) = x^n p_0(x) + q(x)(x^2 - x - 1)$. Sostituendo a x le 2 radici del polinomio riesco a determinare $p_n(x)$.

Approccio matriciale

$$a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$$

Considero come incognita il vettore $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. Allora

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot v_n$$

Quindi il vettore v_n è soluzione di $v_{n+1} = A \cdot v_n$, da cui banalmente

$$v_n = A^n v_0 \quad \uparrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la potenza basta diagonalizzare, cioè esiste M matrice invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}_{\text{radici di } x^2 - ax - b = 0}, \text{ quindi } A = M \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} M^{-1}$$

quindi $A^n = M \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} M^{-1}$, da cui la formula.

Se λ è radice di molteplicità 2, allora

$$M^{-1} A M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

se la elevo alla n ottengo

— o — o —

n dovuto alla
mult.

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$