

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t)$$

Di solito si assume $a_k(t) \equiv 1$ (il che garantisce che si può mettere in forma normale).

L'eq. si dice omogenea se $f(t) \equiv 0$.

Supponiamo sempre che tutti i coeff. sono definiti e continui su un intervallo (a, b) comune.

Sotto questa ipotesi l'eq. soddisfa le cond. del teorema di esistenza e unicità.

Fatto misterioso Se tutti i coeff. sono definiti in (a, b) anche tutte le soluzioni sono definite in (a, b) . Se tutti i coeff. sono definiti e continui su tutto $\mathbb{R}$, alloraidem le soluzioni.

(Brutalmente: la soluzione di una eq. lin. esiste finché può).

Stessa cosa anche per il termine noto.

Il LHS può essere visto come un operatore lineare

$$L: C^k(a, b) \rightarrow C^0(a, b)$$

La verifica che L è lineare è quasi ovvia. Dovrei verificare che

$$L(u+v) = Lu + Lv \quad \forall u \in C^k \dots \forall v \in C^k \dots$$

$$L(\lambda u) = \lambda Lu \quad \forall u \in C^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Risolvere un' eq. diff. OMOGENEA vuol dire trovare il ker di L

— o — o —

Teorema Consideriamo un'eq. diff. lin. OMOGENEA di ordine k . Allora l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione k .

Conseguenza operativa Detti $u_1(t), \dots, u_k(t)$ una base di questo spazio, allora la soluzione generale si scriverà nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

↑ ↑
 k parametri liberi

Sol. gen. eq. diff.
lin. omog.

Se conosco una base, conosco la soluzione generale.

Dim. Il fatto che l'insieme delle sol. è uno spazio vettoriale segue dall'essere un ker.

Volendolo fare direttamente ... siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni, cioè

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0 \qquad \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = 0$$

Posto $w(t) := u(t) + v(t)$, avremo che

$$w^{(i)}(t) = u^{(i)}(t) + v^{(i)}(t) \qquad \forall i=0, \dots, k$$

e quindi sommando le due relazioni prec. si ottiene

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = 0$$

cioè $w(t)$ è ancora soluzione.

Idem da verifica che $\lambda u(t)$ è ancora soluzione.

Per dimostrare che ha dim k , devo esibire una base costituita da k elementi.

Definisco $u_i(t)$ come la soluzione dell'equazione che verifica le cond. iniziali

$$u^{(i-1)}(t_0) = 1 \quad u^{(j)}(t_0) = 0 \quad \text{per } j \neq i-1$$

$\uparrow$
scelto a piacere

Le soluzioni $u_i(t)$ così ottenute sono generatori.

Infatti prendiamo una qualunque altra soluzione, e supponiamo che abbia

$$u^{(i)}(t_0) = \alpha_i \quad i = 0, \dots, k-1$$

Allora dico che

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_k u_k(t)$$

Questo è vero perché il RHS è ancora una soluzione e assume gli stessi valori delle derivate in t_0 .

Perché sono linearmente indipendenti? Prendiamo una loro combinazione lineare

$$C_1 u_1(t) + \dots + C_k u_k(t) = u(t)$$

e supponiamo che sia la funzione identicamente nulla.

Allora tutte le sue derivate si annullano in t_0 , ma

$$u(t_0) = C_1, \quad u'(t_0) = C_2, \quad u''(t_0) = C_3, \dots$$

quindi tutti i coeff. sono nulli.

— 0 — 0 —

Teoria generale dei sistemi non omogenei

Consideriamo un' eq. diff. lin. non omog.

$$Lu = f$$

Fatto 1 La differenza di due soluzioni è una soluzione dell' eq. omogenea associata $Lu = 0$.

Dim. Ovviamente...

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = f(t)$$

Sottraendo e ponendo $w(t) := u(t) - v(t)$ si ottiene

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^k a_i(t) [u^{(i)}(t) - v^{(i)}(t)] = f(t) - f(t) = 0.$$

Più brevemente $Lw = L(u-v) = Lu - Lv = f - f = 0$

Fatto 2 Se v è una sol. dell' eq. non omogenea e w è una sol. dell' eq. omogenea, allora $v+w$ risolve la non omogenea

Dim $L(v+w) = Lv + Lw = f + 0 = f$

Conseguenza operativa: La soluzione generale di un' eq. diff. non omogenea si scrive come

$$u(t) = \bar{u}(t) + C_1 u_1(t) + \dots + C_k u_k(t)$$

$\bar{u}(t)$ soluzione speciale qualunque dell' eq. non omogenea
 $C_1 u_1(t) + \dots + C_k u_k(t)$ soluzione generale dell' omogenea

Oss. Se voglio trovare TUTTE le sol. di un'eq. non omogenea basta che trovi

- una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$ della non omogenea
- una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea.

Esempio È facile trovare una base nel caso delle equazioni di ordine 1 omogenee

$$u'(t) + a_0(t) u(t) = 0$$

$$u' + a(t) u = 0$$

Portando al RHS $u' = -a(t) u$
diventa a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = -a(t) u \quad \leadsto \quad \frac{du}{u} = -a(t) dt \quad \leadsto \quad \log |u| = \underbrace{-A(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva} \\ \text{di } a(t)}} + c$$

$$\leadsto |u(t)| = e^{-A(t)+c} = e^c \cdot e^{-A(t)}$$

$$\leadsto u(t) = c \cdot \boxed{e^{-A(t)}}$$

$\uparrow$ parametro libero $\uparrow$ $u_1(t)$ base dello spazio delle soluzioni

Oss. Si vede bene che l'insieme di definizione di $u(t)$ è lo stesso di $a(t)$.

Oss. Tutti i discorsi fatti finora sfruttano la linearità delle equazioni, ma i coefficienti possono essere qualsiasi purché continue.