

EQUAZIONI DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Procedura:

- ① Separare
- ② Integrare
- ③ Ricavare
- ④ Determinare c
- ⑤ Verifica!
- ⑥ Scegliere la soluzione ottenuta

→ Soluzione generale

→ Soluzione p.b.m. di Cauchy

Esempio 1

$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① Separare

$$\frac{du}{dt} = u^2 \cdot t^3$$

Tutte le u da una parte
tutte le t dall'altra

$$\frac{du}{u^2} = t^3 dt$$

② Integrare: LHS wrt u , RHS wrt t

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c$$

↑ "+c" dell'integrazione

③ Ricavare: u in funzione di t ,

$$u(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4} t^4 + c} = \frac{-4}{t^4 + c}$$

4c o c è sempre una costante

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 + c}$$

Soluzione generale
dell'eq. diff.

Verifica:

$$u'(t) = (+4) \frac{4t^3}{(t^4+c)^2} = \boxed{\frac{16}{(t^4+c)^2}} \cdot t^3$$

$u(t)^2$

④ Determino c imponendo la condizione iniziale $u(0) = 7$

$$7 = u(0) = -\frac{4}{c} \quad \leadsto \quad c = -\frac{4}{7}$$

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 - \frac{4}{7}} = \boxed{\frac{-28}{7t^4 - 4}}$$

Soluzione del pbm. di Cauchy

⑤ Verifica $\rightarrow$ Risolve l'equazione
 $\rightarrow$ Rispetta il dato iniziale

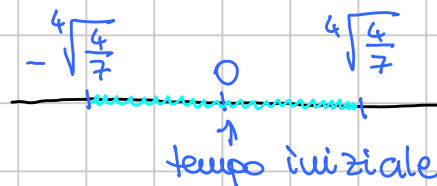
⑥ Studio della soluzione:

- * determinare l'intervallo massimale di esistenza
- * tempo di vita (nel futuro e/o nel passato)
- * "tipo di morte" $\rightarrow$ BLOW UP
 $\hookrightarrow$ BREAK DOWN

Def. Si dice intervallo max. di esistenza il più grande insieme connesso su cui la soluzione è definita

(brutalmente: è il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale)

Nell'esempio $u(t)$ è definita per $t \neq \pm \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$
quindi

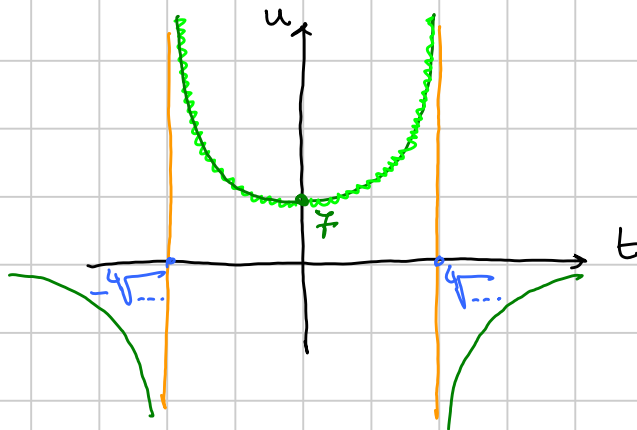


$$\text{int. max. esistenza} = \left(-\sqrt[4]{\dots}, \sqrt[4]{\dots}\right)$$

Def. Il tempo di vita nel futuro (LIFE SPAN) è il sup dell'int. max. di esistenza. Analogamente nel passato.

Grafico di $u(t)$

Fisicamente: l'int. max. di esistenza riflette la zona in cui la soluzione è "attendibile"



Stabilito il life span, diciamo

- che c'è esistenza globale (nel futuro) se $LIFE\ SPAN = +\infty$
- altrimenti sia $T \in \mathbb{R}$ il life span. Allora abbiamo

→ **BLOW UP** se $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty$

→ **BREAK-DOWN** se $u(t)$ esce dalla zona dove il RHS dell'equazione è definito. Spesso questo si traduce nell'avere ma non sempre

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

Nell'esempio si può concludere dicendo

La soluzione ha blow-up per $t = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$

Oss.: il tempo di vita dipende dal dato iniziale

Esempio 2
$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot t^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Se faccio come prima ritrovo $u(t) = \frac{-4}{t^4 + C}$ e se impongo $u(0) = 0$ ottengo

$$-\frac{4}{C} = 0 \quad \text{OOPS!}$$

In tal caso la soluzione è $u(t) \equiv 0$ (interv. max. di esistenza = $\mathbb{R}$)

Esempio 3

$$\begin{cases} u' = u - 1 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① Separare: $\frac{du}{dt} = u - 1$; $\frac{du}{u-1} = dt$

② Integrare: $\log |u-1| = t + c$

③ Ricavare: $|u-1| = e^{t+c}$... nel procedere ho problemi di segni

$$u(t) - 1 = \pm e^{t+c}$$

lo scelgo sulla base della condizione iniziale

$$u(0) - 1 = \pm e^c$$

$$6 = \pm e^c \leadsto \text{scelgo il segno } (+)$$

$$u(t) = 1 \pm e^{t+c} \quad \text{soluzione generale}$$

④ Ricavare c: prendo il segno + e ottengo

$$7 = u(0) = 1 + e^c \leadsto e^c = 6 \leadsto c = \log 6$$

$$u(t) = 1 + e^{t+\log 6} = 1 + 6e^t$$

Oss. $1 \pm e^{t+c} = 1 \pm e^c \cdot e^t = 1 + k e^t$

↑
può essere positivo, negativo
o nullo

Quindi la solus. generale si può scrivere meglio come

$$u(t) = 1 + k e^t$$

Esempio 4 $\begin{cases} u' = -\frac{b}{u} \\ u(0) = 7 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{b}{u} \rightsquigarrow u du = -t dt$

② $\int u du = -\int t dt \rightsquigarrow \frac{u^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + c \rightsquigarrow u^2 = -t^2 + c$

③ $u(t) = \pm \sqrt{c - t^2}$ *Soluzione generale*

④ Per la condizione iniziale scelgo il segno +

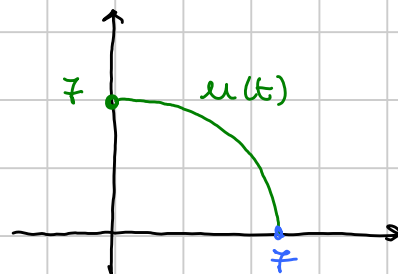
$$7 = u(0) = \sqrt{c} \rightsquigarrow c = 49$$

Soluzione del pbm. di Cauchy: $u(t) = \sqrt{49 - t^2}$

⑤ Esercizio!

⑥ Int. max. esistenza: $[-7, 7]$

La soluzione nel futuro ha
BREAK-DOWN per $T = 7$



Oss. $u(t) \rightarrow 0$ che è dove il RHS dell'equazione ha problemi. In particolare succede che

$$\lim_{t \rightarrow 7^-} u'(t) = -\infty$$

— o — o —