

Esempi di soluzioni di equazioni differenziali

Esempio 1 $u' = u$ (1° ordine, lineare, omogenea, autonoma, variabili separabili, coeff. costanti)

$u(t) = e^t$ è una soluzione (le verifiche di solito sono banali)

$u(t) = e^t + 23$ NON è una soluzione, basta sostituire

$u(t) = 23e^t$ e più in generale $u(t) = ce^t$, con $c \in \mathbb{R}$, è una soluzione.

Si potrebbe dimostrare che tutte le soluzioni sono di questo tipo

$$u(t) = ce^t$$

Soluzione generale, che dipende da un parametro

Esempio 2 $u'' = -u$

Soluzioni: $\sin t$, $\cos t$, $23 \sin t$, $32 \cos t$

Si può dim. che la soluzione generale è

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$

Due parametri a e b reali qualunque

Esempio 3 $u' = -u^2$

Soluzioni: $u(t) = \frac{1}{t}$

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

Si può dimostrare che "tutte" le soluzioni sono del tipo

$$u(t) = \frac{1}{t+c}$$

Un parametro libero

Oltre a queste c'è anche la soluzione costante $u(t) \equiv 0$.

Fatto generale (FALSO, una spesso vero) Un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'equazione.

Oss. Soluzioni diverse possono avere insieme di definizione diversi (vedi esempio 3 sopra).

Oss. Le infinite soluzioni dell' esempio 3 (una anche dell' 1 e 2) sono compatibili con il fatto delle traslate per le equazioni autonome.

PROBLEMA DI CAUCHY

Eq. Diff. + condizioni iniziali

Le condizioni iniziali di Cauchy per un'eq. di ordine k prescrivono il valore di $u(t)$ e di tutte le derivate fino alla $(k-1)$ -esima per uno stesso valore t_0 di t . (sono k condizioni)

Esempi

$$\begin{cases} u' = 7u + t^2 & \leftarrow \text{Eq. Diff.} \\ u(5) = 8 & \leftarrow \text{condizione "iniziale"} \end{cases}$$

$\uparrow$
 tempo iniziale

$$\begin{cases} u' = 7u + t^2 \\ u'(5) = 8 \end{cases} \rightarrow \text{NON va bene! debbo prescrivere } u \text{ e non } u'.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = 7u' + 5u + t^2 \\ u(5) = 8 \\ u'(5) = 7 \end{array} \right\} \text{OK}$$

$u(5) = 8$
 $u'(6) = 8$

$$\left. \begin{array}{l} u(5) = 8 \\ u(11)(5) = 7 \end{array} \right] \text{NO}$$

Idea generale : La soluzione generale di un'eq. di ordine k dipende da k parametri. Ponendo k condizioni spero di poter determinare univocamente i k parametri.

Fatto generale (FALSO, ma quasi vero) Con le condizioni di Cauchy funziona, con le altre in generale no.

Esempio $\begin{cases} u' = 5u \\ u(0) = 8 \end{cases} \rightsquigarrow \text{sol. generale } u(t) = c e^{5t}$
 $\rightsquigarrow \text{se impongo la condizione trovo } c=8$

Il problema ha soluzione unica $u(t) = 8e^{5t}$.

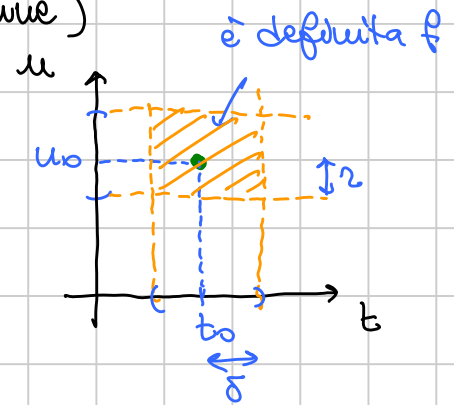
Oss. In fisica spesso si trovano eq. di ordine 2 ($u'' = \text{acc.}$) e le condizioni di Cauchy corrispondono a prescrivere posizione e velocità iniziale.

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO 1 (teorema di esistenza)

Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. in forma normale di ordine 1 (ma vale per ogni ordine)

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Supponiamo f definita in un rettangolo che contiene la condizione iniziale, diciamo

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (u_0 - r, u_0 + r) \quad \delta > 0, r > 0$$

Supponiamo che f sia continua nella zona di definizione (bisognerebbe aver introdotto la continuità in 2 variabili).

Allora il problema ammette almeno una soluzione.

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO 2 (teorema di esistenza e unicità)

Sia tutto come nel teorema 1. Supponiamo in aggiunta che f sia più che continua, cioè esiste L tale che

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall u_1 \in (u_0 - r, u_0 + r)$$

f , come funzione di u , è lip. e la sua costante non dipende da t .

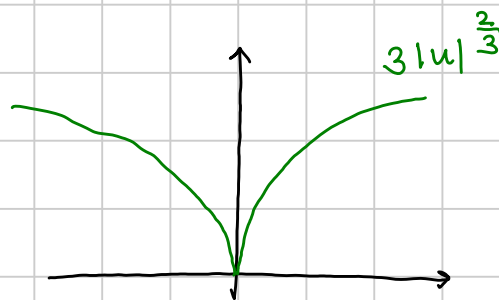
$$\forall u_2 \in (u_0 - r, u_0 + r)$$

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Allora il problema di Cauchy ha soluzione unica.

Esempio (L'Esempio)

$$\begin{cases} u' = 3 \underbrace{|u|^{\frac{2}{3}}}_{f(u)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$



$f(u)$ non è lipschitziana vicino all'origine, ma è continua

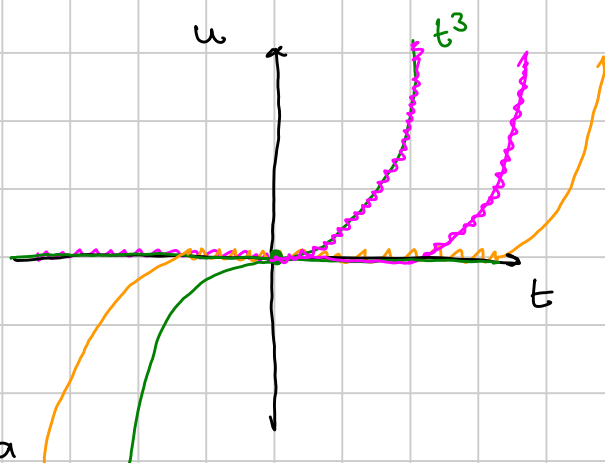
Una soluzione del pbm. di Cauchy è $u(t) \equiv 0$

Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$ (verifica)

Quindi il pbm. di Cauchy ammette almeno 2 soluzioni

Una terza soluzione è

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ t^3 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$



Tutte le infinite traslate a dx della terza sono soluzioni.

Più in generale: tutte le "arancioni" sono soluzioni e dipendono da due parametri