

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In un'eq. diff. l'incognita è una funzione, che di solito si indica con una di queste notazioni:

 $y(x)$ $y(t)$ $u(x)$ $u(t)$

L'eq. è una relazione che coinvolge t , $u(t)$ e un po' di derivate della funzione $u(t)$.

Esempi

$$u'(t) = u(t) + t^2$$

$$\cos(u'(t)) + \sin(u(t)) = 0$$

$$u''(t) + 7[u'(t)]^2 = \cos t$$

$$u' = u + t^2$$

$$\cos u' + \sin u = 0$$

$$u'' + 7(u')^2 = \cos t$$

↑

Notazione rapida: eliminiamo le t che sono argomento di $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$, ...

Def. Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione.

Notazione generale Un'eq. diff. di ordine k si presenta nella forma generale

$$\Phi(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0$$

dove $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$

↑
c'è la derivata 0-esima $u(t)$
e c'è la t

Una funzione $u(t)$ è soluzione di un'eq. diff. come sopra se

- $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure è definita su una semiretta aperta o tutto $\mathbb{R}$)

↑
L'insieme di definizione di $u(t)$ è tale in ogni caso del problema (l'ambito è sempre $\mathbb{R}$)

- u è di classe C^k nell'insieme di definizione
- $(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) \in D$ (l'insieme di def. di Φ)
- l'equazione è soddisfatta per ogni $t \in (a,b)$ (o comunque l'insieme di definizione di $u(t)$).

Def. Un'eq. diff. si dice in forma normale se "la derivata di ordine massimo è ricavata rispetto al resto", cioè se è della forma

$$u^{(k)}(t) = F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$$

dove ora $F: \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\hat{D} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$

Esempi

$$u'' = u' + 7u$$

$$u'' - 7u = \cos t$$

$$(u'')^3 - 7u = \cos t$$

$$t u'' - 7u = \cos t$$

$$(u'')^4 = 7u$$

Forma normale

quasi: si può mettere facilmente in F.N.

quasi: -- -- -- --

NO: posso ricavare, ma solo per $t \neq 0$

NO: non c'è verso di ricavare u'' in modo univoco.

Def. Un'eq. diff. si dice autonoma se la funzione Φ non dipende esplicitamente da t , ma solo da $u(t)$ e dalle sue derivate.

Oss. Se scrivo un'eq. diff. autonoma in notazione rapida, allora non compaiono le t .

Esempi

$$\underline{u''(t) = u(t)}$$

autonoma

$$u'' = u$$

Proposizione

Se una certa funzione $u(t)$ è soluzione di un'equazione autonoma, allora tutte le sue traslate temporali $u(t+c)$ (con $c \in \mathbb{R}$) sono soluzioni della stessa equazione.

Dim.

Sia $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione di

$$\Phi(u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0 \leftarrow \text{vale per ogni } t \in (a, b)$$

Sia $v: (a-c, b-c) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $v(t) = u(t+c)$.

Allora v ha la stessa regolarità di u e

$$v^{(i)}(t) = u^{(i)}(t+c)$$

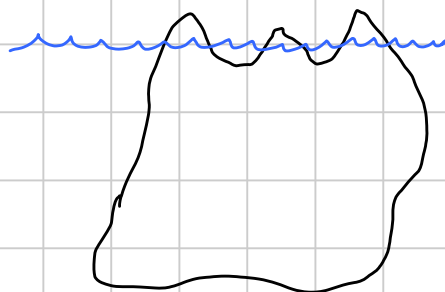
e quindi

$$\underbrace{\Phi(v(t), v'(t), \dots, v^{(k)}(t))}_{t \in (a-c, b-c)} = \underbrace{\Phi(u(t+c), u'(t+c), \dots, u^{(k)}(t+c))}_{t+c \in (a, b)} = 0$$

↑
per Hp.

Tre classi speciali di eq. diff.

- ① Equazioni a variabili separabili (primo ordine)
- ② Equazioni lineari del primo ordine (coeff. qualunque)
- ③ Equazioni lin. di ordine qualunque a coeff. costanti (omogenee e non omogenee)



Eq. Variabili separabili

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Eq. 1° ordine in forma normale
con RHS che è prodotto di una
funzione della sola t per una
funzione della sola u

Oss. Le eq. del 1° ordine in forma normale autonome rientrano
tra quelle a variabili separabili.

$$u' = g(u)$$

↑ è come se ci fosse $f(t) \equiv 1$.

Eq. diff. lineari Un' eq. diff. lineare di ordine k è un' equaz.
che si presenta nella forma

$$a_k(t) u^{(k)}(t) + \dots + a_1(t) u'(t) + a_0(t) u(t) = f(t)$$

o in maniera più compatta nella forma

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t)$$

con l'accordo che
 $u^{(0)}(t) = u(t)$

Si dicono coefficienti dell'equazione le funzioni $a_i(t)$, che
dipendono solo da t .

L'equazione si dice

- OMOGENEA se $f(t) \equiv 0$
- NON OMOGENEA altrimenti

Oss. Si può mettere in forma normale per i valori di t
per cui $a_k(t) \neq 0$
↑ grado max

Equazioni lineari del 1° ordine a coeff. qualunque

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

Eq. lin. ordine qualunque a coeff. costanti

$$a_k u^{(k)}(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = f(t)$$

sono costanti, cioè non dipendono da t

Oss. ① lin. a coeff. costanti omog. $\stackrel{\text{SI}}{\Rightarrow}$ autonoma

② lin. autonoma $\stackrel{\text{SI}}{\Rightarrow}$ coeff. costanti
 $\Rightarrow$ omogenea
 NO

$$u'' + 7u' + 5u = 8$$

$\uparrow$
Non
omog.

— o — o — o —