

STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

Funzioni definite mediante un integrale, ad esempio

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$F(x)$ è una primitiva della funzione e^{-x^2} .

Teorema (molto misterioso) $F(x)$ non si può esprimere usando le funzioni elementari, composizioni e operazioni algebriche.

Esercizio Risolvere la disequazione

$$\arctan x \geq \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Studio la funzione $g(x) = \arctan x - \int_0^x e^{-t^2} dt$

Intanto $g(x)$ è dispari perché $\arctan x$ e $F(x)$ sono dispari.
Poi $g(0) = 0$. Studio la monotonia

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Provo a studiare il segno di $g'(x)$:

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \geq e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1+x^2$$

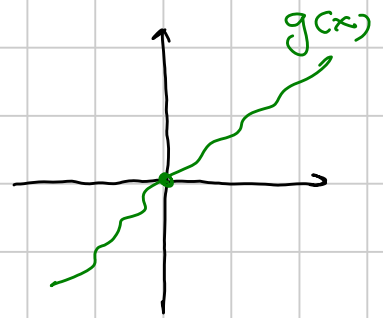
Ricordando la disuguaglianza classica $e^t \geq 1+t$ che è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$ con uguaglianza se e solo se $t=0$, otteniamo

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Monotonia 3 $\Rightarrow g(x)$ è strett. crescente

Quindi $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

— 0 — 0 —



Esercizio Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 5 di $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 + o(t^5)\right) dt \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{10} x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

Ho usato un fatto generale già visto

Se $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, allora $\int_0^x f(t) dt = o(x^{3+1})$ per $x \rightarrow 0$

— 0 — 0 —

Oss. Questo giustifica formalmente come ottenere lo sviluppo di $\arctan x$, $\arcsin x$ e $\operatorname{sech} x$ (oggi si dice $\operatorname{arctanh} x$) facendo la primitiva delle loro derivate.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad \text{se faccio la primitiva...}$$

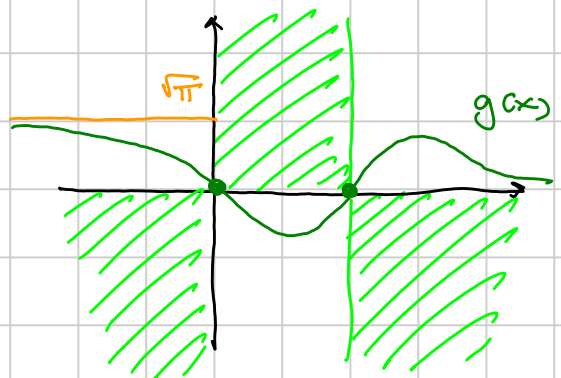
— 0 — 0 —

Esercizio Studiare la funzione $g(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$

Intanto $g(0) = 0$ e anche $g(1) = 0$.

Si studia bene il segno.

Essendo l'integrale di una funzione positiva, sarà $> 0 \Leftrightarrow x < x^2$, cioè se e solo se $x < 0$ oppure $x > 1$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \left[= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x^2) - F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0 \right]$$

Queste due informazioni bastano per dedurre che $g(x)$ è limitata. Calcoliamo $g'(x)$. Consideriamo

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Allora $g(x) = F(x^2) - F(x)$, quindi

$$\begin{aligned} g'(x) &= F'(x^2) \cdot 2x - F'(x) \\ &= e^{-x^4} \cdot 2x - e^{-x^2} \end{aligned}$$

Volendo si potrebbe studiare il segno di $g'(x)$ studiando un'altra funzione,

— o — o —

$$g(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan(t^5) dt$$

$$g'(x) = \arctan(x^{15}) \cdot 3x^2 - \arctan(x^{10}) \cdot 2x$$

Sviluppo di Taylor di ordine 30 di $g(x)$?

Per andare sul sicuro, pongi

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \arctan(t^5) dt = \int_0^x t^5 - \frac{1}{3} t^{15} + o(t^{24}) dt \\ &= \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{48} x^{16} + o(x^{25}) \end{aligned}$$

$$g(x) = F(x^3) - F(x^2) = \frac{1}{6} x^{18} - \frac{1}{12} x^{12} + o(x^{30})$$

Esercizio Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{a_n \rightarrow 0} \quad (\text{dimostrato più volte})$$

1° modo : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ vera per ogni $t \geq 1$, quindi

per $n \geq 1$ si ha $\int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_n^{+\infty} = e^{-n}$

↑
brutale

Quindi $a_n \leq e^{-n}$, quindi la serie converge.

Rilancio $\sum_{n=0}^{\infty} e^n \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Ovviamente $e^{-t^2} \leq e^{-7t}$ per ogni $t \geq 7$ e da qui si chiude come prima

Domanda! come si comporta veramente $\int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt = a_n$

Pongo $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ e quindi

$$a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - F(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{e^{-n^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - F(x)}{e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2}}{-2xe^{-x^2}} = 0$$

↑
 $\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\acute{o}p}$

Quindi a_n va a 0 più velocemente di e^{-n^2} .

Domanda : se $f(x) \rightarrow +\infty$ è vero che $\frac{F(x)}{f(x)} \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$

e^x dice che non è vero. Può essere che $\frac{F(x)}{f(x)} \rightarrow 0$?

[51] Basta prendere $f(x) = e^{x^2}$. La sua primitiva è

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2x e^{x^2}} = 0$$

$[\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{H\^op}]$

Quanto cresce $F(x)$ (sappiamo che è meno di e^{x^2}).

Trovare una funzione $g(x)$ esplicita tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = 1$$

Proviamo con $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$. Vediamo se funziona

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{g(x)} \stackrel{\text{H\^op}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{2x \cdot e^{x^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2x^2}} = 1$$

Finalmente so come si comporta la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} \int_0^n e^{x^2} dx \quad \text{si comp. come } \sum \frac{1}{n} \quad !!!$$

— o — o —