

Fatto generale Consideriamo un integrale del tipo $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$

Supponiamo che

- ① la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ è limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $|F(x)| \leq M \quad \forall x \geq a$
- ② $g(x)$ debolmente decrescente, C^1 e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$

Allora l'integrale improprio converge

Dim. $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)g(x)dx \quad (\text{per parti})$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ [F(x)g(x)]_a^A - \int_a^A F(x)g'(x)dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{F(A)g(A)}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{poiché } |F(A)g(A)| \leq M g(A) \downarrow 0}} - \underbrace{F(a)g(a)}_{\text{numero}} - \underbrace{\int_a^A F(x)g'(x)dx}_{\substack{\text{Questo converge} \\ \text{assolutamente}}}$$

$$|F(x)g'(x)| \leq M |g'(x)|dx$$

Ora $\int_a^A M |g'(x)|dx = M \int_a^A |g'(x)|dx = -M \int_a^A g'(x)dx$

$\uparrow$
 $g'(x) \leq 0$
 essendo deb.
 dec.

$$= -M (g(A) - g(a)) \rightarrow Mg(a)$$

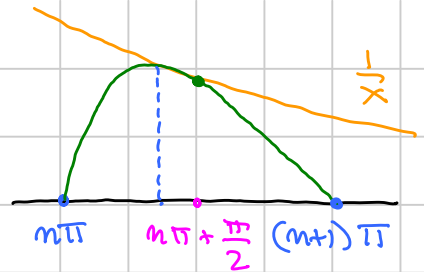
$\downarrow 0$

$$\int_a^{+\infty} M |g'(x)|dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx \text{ conv.}$$

Oss. $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$

Il contatto con $\frac{1}{x}$ avviene nel p.to centrale (perché $|\sin x| = 1$).

Il p.to di max è un po' prima (si vede studiando la derivata).



Fare i rettangolini vuol dire prendere l'intervallo dove $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$

Osservazione È possibile calcolare il valore di questi integrali:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

integrale di GAUSS

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

integrale di DIRICHLET

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

integrale di FRESNEL

Perché il 1° converge? $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per ogni $x \geq 1$, quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{numero}} + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx \text{ e questo si calcola con la primitiva}$$

Esercizio Dato $a > 0$, calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$

Se potessi fare il cambio di variabili $= \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2} dx$

$$\sqrt{a}x = y \rightsquigarrow \sqrt{a}dx = dy \quad = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{a}} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Per giustificarlo rigorosamente faccio il cambio in $\int_0^A \dots$ e poi passo al limite per $A \rightarrow +\infty$.

ULTRA - BRUTAL MODE

Metto $a = i$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

"

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx - i \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

Uguagliando parti reali e immaginarie abbiamo gli integrali di Fresnel.

— 0 — 0 —

LEMMA DI SOMMAZIONE PARZIALE (ABEL)

Siano f_n e g_n due successioni. Allora per ogni $m \leq n$ si ha

$$\sum_{k=m}^n f_k (g_{k+1} - g_k) = f_{n+1} g_{n+1} - f_m g_m - \sum_{k=m}^n g_{k+1} (f_{k+1} - f_k)$$

$\int f g'$

$[fg]_m^n$

$-\int g f'$

Dim 1 (shift degli indici nella prima sommatoria)

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n f_k (g_{k+1} - g_k) &= \sum_{k=m}^n f_k g_{k+1} - \sum_{k=m}^n f_k g_k \\ &= \sum_{k=m}^n f_k g_{k+1} - \sum_{k=m-1}^{n-1} f_{k+1} g_{k+1} \end{aligned}$$

SHIFT degli indici

$$= \sum_{k=m}^{n-1} f_k g_{k+1} + f_n g_{n+1} - f_m g_m - \sum_{k=m}^{n-1} f_{k+1} g_{k+1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} g_{k+1} (f_k - f_{k+1}) + f_n g_{n+1} - f_m g_m$$

$$= \sum_{k=m}^n g_{k+1} (f_k - f_{k+1}) - \cancel{g_{n+1} f_n} + g_{n+1} f_{n+1} + \cancel{f_n g_{n+1}} - f_m g_m$$

= RHS.

Dim 2 (Stessa idea della dim. dell' integrazione per parti)

$$f_{n+1} g_{n+1} - f_m g_m = \sum_{k=m}^n \underbrace{(f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k)}_{\substack{\uparrow \\ \text{somma telescopica}}} \quad \uparrow \text{derivata del prodotto}$$

$$= \sum_{k=m}^n (f_{k+1} g_{k+1} - \underbrace{f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1}}_{\text{derivate}} - f_k g_k)$$

$$= \sum_{k=m}^n g_{k+1} (f_{k+1} - f_k) + \sum_{k=m}^n f_k (g_{k+1} - g_k).$$

Riorganizzando si ottiene la tesi.
— o — o —

Ultima riscrittura: shift di -1 sugli indici di g

$$\sum_{k=m}^n f_k (g_k - g_{k-1}) = f_{n+1} g_n - f_m g_{m-1} - \sum_{k=m}^n g_k (f_{k+1} - f_k)$$

Fatto generale Consideriamo una serie del tipo $\sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k$
Supponiamo che

- A_k = somme parziali di $\sum a_k$ sono limitate
- b_k debolmente decrescente e $b_k \rightarrow 0$

Allora

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k \quad \text{converge}$$

Dim. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n b_k (A_k - A_{k-1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{b_{n+1} A_n}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{b_m A_{m-1}}_{\substack{\downarrow \\ \text{numero}}} - \underbrace{\sum_{k=m}^n A_k (b_{k+1} - b_k)}_{\text{converge assolutamente}} \right\}$$

$$-\sum |A_k| \cdot |b_{k+1} - b_k| \leq -M \sum |b_{k+1} - b_k| = M \underbrace{\sum b_k - b_{k+1}}_{\text{telescopica}}$$

Esempio classico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Uso il lemma precedente con $b_n = \frac{1}{n}$ (decresc. e $\rightarrow 0$)

e $a_n = \sin n$

Devo verificare che $A_n = \sum_{k=1}^n \sin k$ è una succ. limitata

1° modo: esiste una formula esplicita per A_n

Fatto generale

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= \sum_{k=1}^n \cos(kx) + i \sum_{k=1}^n \sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k \leftarrow \text{geometrica!} \\ &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} - 1 \end{aligned}$$

↑
non c'è il termine con $k=0$

Quando metto $x=1$ ho finito perché il denominatore è fisso e diverso da 0, e il numeratore è limitato

$$|(e^i)^{n+1}| = 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$