

Esempio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x} dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

Idea della dim. Si fa la primitiva, che risulta essere

$$\log(\log x) \quad \text{se } a = 1 \qquad \frac{1}{1-a} \frac{1}{\log^{a-1} x} \quad \text{se } a \neq 1$$

Oss. Sia $a < b$. Allora gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{supposti con unico p.b.m. a } +\infty)$$

hanno lo stesso tipo di comportamento. Nel caso in cui convergano, vale la relazione

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

Idea della dim.

$$\int_a^A f(x) dx = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{numero fisso}} + \int_b^A f(x) dx$$

I limiti per $A \rightarrow +\infty$ di LHS e RHS hanno quindi lo stesso comportamento.

— o — o —

Studiare un integrale improprio = stabilire il tipo di comportamento
SENZA fare la primitiva.

CRITERI DI CONVERGENZA (Per integrali unoproblema)

$f(x)$ a segno costante
vicino al problema

- Criterio del confronto
- Criterio del confronto
asintotico $\rightarrow$ casi standard
 $\rightarrow$ casi limite

$f(x)$ a segno variabile
vicino al problema

- Criterio assoluta
integrabilità

Criterio del confronto Siano $\int_E f(x) dx$ e $\int_E g(x) dx$

due integrali impropri unoproblema con lo stesso tipo di problema.
Supponiamo che

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\forall x \in E$$

$\uparrow$
o per lo meno vicino al
problema.

Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\int_E f(x) dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x) dx < +\infty$$

(converge) (converge)

Ogni altra implicazione è FALSA.

Oss. Se $f(x)$ ha segno costante in E , allora $\int_E f(x) dx$ può
solo convergere o divergere a $+\infty$

Dim. Confronto tra limiti (come per le serie)

Confronto asintotico

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

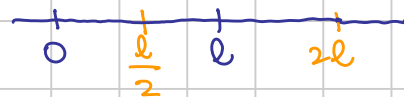
monoproblema con lo stesso problema. Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E (o almeno vicino al problema).

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \text{pbu}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Allora i due integrali hanno lo stesso tipo di comportamento. Nei casi limite ($l = 0$ oppure $l = +\infty$) vale solo metà della tesi, esattamente come con la serie.

Idea della dim. Stessa delle serie



Poiché $\lim_{x \rightarrow \text{pbu}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, allora vicino al problema si avrà che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l$$

da cui
$$\frac{l}{2} g(x) \leq f(x) \leq 2l g(x)$$

e da qui si chiude per confronto semplice.

Se $l = 0$ oppure $l = +\infty$, allora la disuguaglianza è da una parte sola.

Absoluta integrabilità

Per integrali monoproblema vale l'implicazione

$$\int_E |f(x)| dx \text{ converge} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH (restano aperte 4 opzioni)}$$

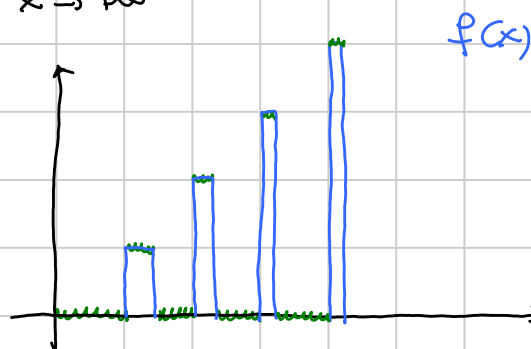
Achtung! Per gli integrali impropri non c'è la condizione necessaria come per le serie, cioè può accadere che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

ma non accade che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

l'esempio è qualcosa del tipo

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \text{somma aree rettangoli}$$



Basta prendere altezza $= n$, base $> \frac{1}{n^2}$

Versione debole della condizione necessaria:

se $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge $\Rightarrow$ non può essere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$

può essere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ N.E.

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx$ Due pbm: $\int_0^5 \dots + \int_5^{+\infty} \dots$

$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx$ converge per C.A. con $\frac{1}{x^3}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + \sqrt{x}} = 1$, quindi $\int f(x) dx$ con pbm. a $+\infty$ si comporta come quello di $g(x)$ con pbm. a $+\infty$, quindi converge

$\int_0^5 \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx$ converge per C.A. con $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt{x}} = 1$$

↑
pbm

Quindi $\int f(x) dx$ con pbm. a 0 si comporta come $\int g(x) dx$ con pbm a 0, quindi converge

Esempio 2 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ oss: $\sin x$ è ≥ 0 in $[0,1]$, quindi l'integranda è a segno costante.
L'unico pbm. dell'integrale è in $x=0$
L'integrale diverge per confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ e quindi stesso comportamento}$$

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan x}{x^3} dx = \int_0^4 + \int_4^{+\infty}$

$$\int_4^{+\infty} \dots \text{ converge perché } 0 \leq \frac{x - \arctan x}{x^3} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

e quindi basta il confronto con $\frac{1}{x^2}$

$\int_0^4 \dots$ NON È NEMMENO UN INTEGRALE IMPROPRIO, perché $f(x)$ è limitata in $(0,4]$ in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

Dall'esistenza del limite alla limitatezza serve una dim.

Esempio 4 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_{-1}^1 = 0 - 0 = 0$ NO!!!!!!

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$, $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx = -\infty \Rightarrow$ INDETERMINATO

