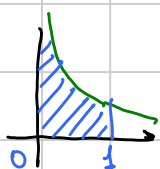


INTEGRALI IMPROPRIIntegrali PROPRI

$$\int_E f(x) dx$$

 $\rightarrow E$ insieme limitato $\rightarrow f(x)$ limitata in E Integrali IMPROPRI: se manca uno o entrambi gli ingredientiEsempi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$



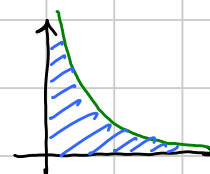
zona integ. limitata
 $f(x)$ NON limitata

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$



$f(x)$ limitata
 zona non limitata

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



$f(x)$ non limitata
 zona non limitata

Integrale improprio MONOPROBLEMA

Sostanzialmente sono due casi

① $f(x)$ limitata e zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$
 oppure $(-\infty, a]$

② zona di integrazione = intervallo $[a, b]$
 $f(x)$ non limitata nell'intorno di uno dei due estremi

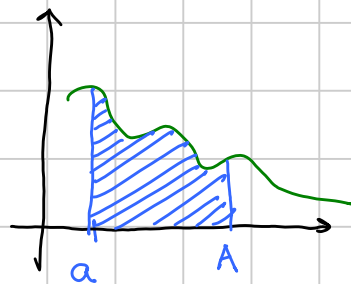
Def. (caso ①) Voglio definire $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Suppongo che, per ogni $A \in (a, +\infty)$, si abbia che $f(x)$ è limitata in $[a, A]$.

Allora si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

↑
integrale proprio



Def. (caso ②) Voglio definire $\int_a^b f(x) dx$, con $f(x)$ che è non limitata a destra di a .

Suppongo che per ogni $\varepsilon \in (0, b-a)$ si abbia che $f(x)$ è limitata in $[a+\varepsilon, b]$.

Allora si pone

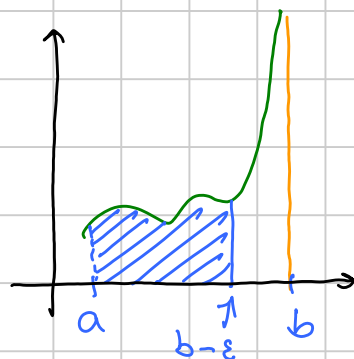
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

↑
integrale proprio



Se il problema è in b la def. è analoga

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$



Oss. L' integrale improprio è un limite, quindi ha 4 possibilità

- essere un numero reale l (si dice che l' int. converge ad l)
- essere $+\infty$ (l' int. impr. diverge a $+\infty$)
- essere $-\infty$ (" " " " $-\infty$)
- non esistere (l' int. impr. è indeterminato)

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1$$

Esempio 2 $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{1}{x} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_\varepsilon^2$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 2 - \log \varepsilon) = +\infty$$

$\downarrow$
 $-\infty$

Esempio 3 $\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-4} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_A^{-4}$

$$= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{A}\right) = \frac{1}{4}$$

$\downarrow$
 0

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin x]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin A - \sin 0)$$

$\downarrow$ non ha limite $\uparrow$ 0

L'integrale improprio è indeterminato

Esempio 5 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan A - \arctan 1] = \frac{\pi}{4}$$

$\downarrow$ $\frac{\pi}{2}$ $\uparrow$ $\frac{\pi}{4}$

Cosa fare se c'è più di un problema

Si prova a spezzare il tutto in più integrali con un problema solo!

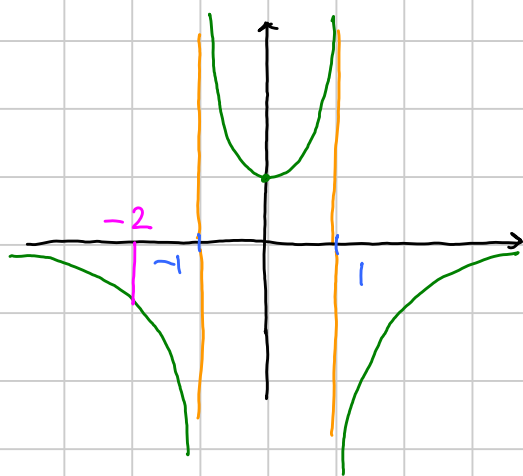
Esempio 1
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^3 \frac{1}{x} dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

↑ ↑
hanno un pbm. solo

Esempio 2
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Esempio 3
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-x^4} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} \dots + \int_{-2}^{-1} \dots + \int_{-1}^0 \dots + \int_0^1 \dots + \int_1^7 \dots + \int_7^{+\infty} \dots$$



Dopo aver spezzato

→ studio separatamente i vari pezzi MONOPROBLEMA

→ deduco il comportamento globale sommando quello che è successo sui vari pezzi (aritmetica in $\bar{\mathbb{R}}$)

con l'accordo che

SE ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $+\infty$ E

ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $-\infty$,

ALLORA QUELLO GLOBALE SI DICHIARA INDETERMINATO

Esempio 4
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = +\infty$$

↓ ↓
 $2\sqrt{3}$ $+\infty$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^3 = 2\sqrt{3} \quad (= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{3})$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\sqrt{A} - 2\sqrt{3}) = +\infty$$

Esempio classico

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge} & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge} & \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

Dim. Caso $a \neq 1$ $\int \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}}$

quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^a} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} \frac{1}{A^{a-1}} - \frac{1}{1-a}$$

$\downarrow$
se $a > 1$ questo $\rightarrow 0 \leadsto$ resta $\frac{1}{a-1}$
se $a < 1$ questo $\rightarrow +\infty \leadsto$ diventa $+\infty$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^a} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_{\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a} \frac{1}{\varepsilon^{a-1}}$$

$\downarrow$
se $a < 1$ questo $\rightarrow 0 \leadsto$ resta $\frac{1}{1-a}$
se $a > 1$ questo $\rightarrow +\infty \leadsto$ diventa $+\infty$

Per $a=1$, la primitiva è $\log x$ e questa provoca la divergenza sia con p.lim. a $+\infty$, sia con p.lim. a 0^+ .