

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Def. Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi. Questa è definita dove $Q(x) \neq 0$.
Posso sempre assumere che $P(x)$ e $Q(x)$ non abbiano fattori in comune.

Teorema Ogni funzione razionale $f(x)$ ha una primitiva che è combinazione lineare di funzioni razionali e funzioni del tipo $\arctan(ax^2+bx+c)$ e $\log(ax^2+bx+c)$.

Algoritmo

- ① Divisione
- ② Fattorizzazione
- ③ Sistema lineare
- ④ Integrazione dei pezzi elementari

① DIVISIONE Se $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ non c'è nulla da fare.
Se $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$, allora faccio la divisione tra polinomi, cioè scrivo

$$P(x) = Q(x) \underbrace{A(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto}}$$

con $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.

Tornando alla funzione razionale

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \boxed{A(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

↑
polinomio,
facile da integrare

↑ muova funz. raz., con
 $\deg(\text{num}) < \deg(\text{denom.})$

Conseguenza: se so integrare le funz. raz. con $\deg(\text{num}) < \deg(\text{denom.})$, le so integrare tutte.

② FATTORIZZAZIONE Scompongo il denominatore $Q(x)$.

Fatto generale Ogni polinomio $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ si scrive come prodotto di fattori di 1° grado o di 2° grado (non ulteriormente scomponibili in $\mathbb{R}[x]$). Alcuni fattori possono essere ripetuti, ed il numero di volte in cui un fattore compare si chiama molteplicità.

$$Q(x) = \prod_{i=1}^k (a_i x + b_i)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^r (A_i x^2 + B_i x + C_i)^{M_i}$$

Nota bene: $\deg(Q(x)) = \sum_{i=1}^k m_i + \sum_{i=1}^r 2 M_i$

È importante che i fattori $A_i x^2 + B_i x + C_i$ siano non ulteriormente scomponibili, cioè $B_i^2 - 4 A_i C_i < 0$ per $i=1, \dots, r$.

③ SISTEMA LINEARE: DECOMPOSIZIONE DELLA FUNZIONE RAZ.

Idea: scrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali più semplici

Due metodi: → decomposizione in fratti semplici
→ metodo di HERMITE

Decomposizione in fratti semplici

Caso semplice: se nella fatt. di $Q(x)$ tutte le molteplicità sono 1 (cioè $m_i = M_i = 1$), allora si può scrivere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ come comb. lineare di frazioni del tipo $\frac{1}{Q(x)}$ $\uparrow$ con $\deg(P) < \deg(Q)$

$$\frac{1}{a_i x + b_i}$$

$$\frac{1}{A_i x^2 + B_i x + C_i}$$

$$\frac{x}{A_i x^2 + B_i x + C_i}$$

Esempio

$$\frac{x^3 + 2x}{x^4 - 1} = \frac{x^3 + 2x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Esistono unici A, B, C, D per cui la decomposizione funziona. Come trovo A, B, C, D ? Con il sistema lineare!

$$\frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

espandendo il numeratore, ottengo un pol. di 3° grado i cui coeff. sono comb. lin. di A, B, C, D .

Uguagliando i coeff a quelli di $x^3 + 2x$ ottengo un sistema lineare di 4 equ. in 4 incognite. Questo sistema ha magicamente solut. unica.

Caso generale Se ci sono le molteplicità, devo usare tutte le potenze dei fattori al denominatore fino alla molteplicità

Esempio

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3 (x+2) (x^2+1)^2}$$

8 equ. in 8 incognite $\uparrow$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$$

Decomposizione di Hermite

In assenza di molteplicità è uguale alla precedente

Se ci sono molteplicità, allora si scrive

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{stessi termini come se le molteplicità fossero uguali ad 1} + \frac{d}{dx} \frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}$$

dove

- $\hat{Q}(x)$ è il polinomio che ha gli stessi fattori di $Q(x)$, ma con tutte le molteplicità calate di 1,
- $\hat{P}(x)$ è un polinomio a coeff. incogniti con $\deg(\hat{P}) = \deg(\hat{Q}) - 1$.

Esempio

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3 (x+2) (x^2+1)^2} \rightarrow$$

8 coeff.
incogniti

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x-1)^2 (x^2+1)^1}$$

parte inutilizzata del
vecchio denominatore

④ INTEGRAZIONE DELLE FRAZIONI ELEMENTARI

Se ho decomposto alla Hermite, devo saper integrare frazioni del tipo

$$\frac{A}{ax+b}$$

$$\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}$$

denom. non
scomponibile

Se ho decomposto alla 1ª maniera, devo saper integrare anche

$$\frac{A}{(ax+b)^m}$$

$$\frac{Dx+E}{(Ax^2+Bx+C)^m}$$

Ora $\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \log(ax+b)$

$$\int \frac{A}{(ax+b)^m} dx = \frac{A}{a} \frac{1}{1-m} \frac{1}{(ax+b)^{m-1}}$$

Esempi $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$$\int \frac{3x+5}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \log(1+x^2) + 5 \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \arctan(x+1)$$

$$\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$$

In generale:

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}$$

se $a > 0$