

Teorema Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona.

Allora f è integrabile in $[a, b]$.

Dim. Wlog suppongo f debolmente crescente.

Cosa devo fare? Devo, per ogni $\varepsilon > 0$,

trovare due funzioni a gradino

$\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (*)$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \varepsilon$$

Suddivido $[a, b]$ in n punti uguali mediante n punti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

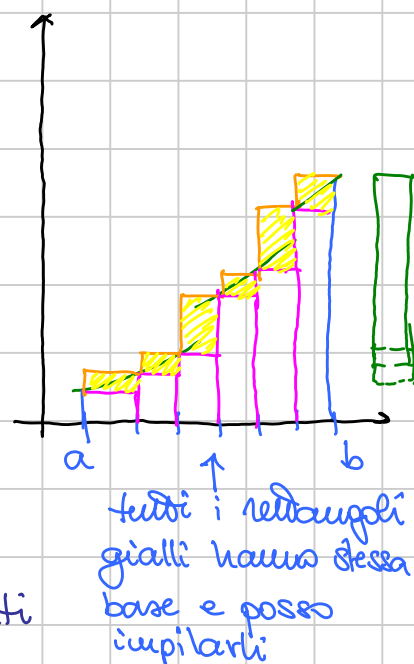
In ogni intervallo (x_{i-1}, x_i) (con $i = 1, \dots, n$) pongo

$$\varphi_1(x) = f(x_{i-1})$$

$$\varphi_2(x) = f(x_i)$$

Grazie alla monotonia ho gratis la $(*)$. Ora

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx &= \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{\text{telescopica}} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$



Prendendo n abbastanza grande, la differenza diventa $\leq \varepsilon$. $\square$

Teorema Sia f integrabile in $[a, b]$.

Allora $|f|$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Dim. Supponiamo di sapere già che $|f(x)|$ è integrabile. Allora da

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

segue per la monotonia dell'integrale che

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

il che è equivalente alla disuguaglianza

$$(\text{Pecorso: } -B \leq A \leq B \Leftrightarrow |A| \leq B)$$

Resta da dimostrare che $|f(x)|$ è integrabile, sapendo che $f(x)$ lo è.

Ipotesi: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ a gradino t.c.

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x)$$

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx \leq \varepsilon$$

Tesi: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ a gradino t.c.

$$\psi_1(x) \leq |f(x)| \leq \psi_2(x)$$

$$\int_a^b [\psi_2(x) - \psi_1(x)] dx \leq \varepsilon$$

Problema: trovare ψ_1 e ψ_2 a partire da φ_1 e φ_2 .

Considero gli intervallini della suddivisione per $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$

- se in un intervallo $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sono ≥ 0 , allora nello stesso intervallo $f(x) \geq 0$ quindi posso usare

$$\psi_1 = \varphi_1 \quad \text{e} \quad \psi_2 = \varphi_2$$

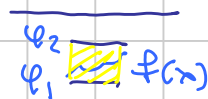
così nell'intervallo $\psi_1 \leq |f| \leq \psi_2$ e $\int \psi_2 - \psi_1 = \int \varphi_2 - \varphi_1$

- se in un intervallo φ_1 e φ_2 sono ≤ 0 , allora posso porre

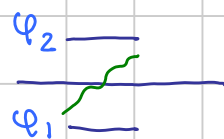
$$\psi_1 = -\varphi_2 \quad \text{e} \quad \psi_2 = -\varphi_1$$

così vale la disuguaglianza e

$$\int \psi_2 - \psi_1 = \int \varphi_2 - \varphi_1$$



- se in un intervallo $\varphi_1 < 0$ e $\varphi_2 > 0$ allora nello stesso intervallo ho



$$0 \leq |f(x)| \leq \underbrace{\max\{\varphi_2, -\varphi_1\}}_{\psi_2}$$

"
 ψ_1

e

$$\int \psi_2 - \psi_1 = \int \max\{\varphi_2, -\varphi_1\} \leq \int \varphi_2 - \varphi_1$$

Sommando su tutti gli intervallini si ottiene la tesi

— 0 — 0 —

Discorso del +c Prendiamo $f(x) = x^2$.

Una primitiva è $\frac{1}{3}x^3 = F(x)$. Basta derivare per verificare

L'insieme di tutte le primitive di x^2 è $\{\frac{1}{3}x^3 + c : c \in \mathbb{R}\}$

Per il calcolo operativo di $\int_a^b x^2 dx$ il +c non serve a nulla.

Prendiamo ora $f(x) = \frac{1}{x}$. Una primitiva è $F(x) = \log x$, o per lo meno lo è per ogni $x > 0$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x > 0$$

Ancora meglio: $F(x) = \log |x|$ è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$.

Infatti

- per $x > 0$ è ovvio
- per $x < 0$ si ha $F(x) = \log(-x)$, quindi

$$F'(x) = [\log(-x)]' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

Domanda: come sono fatte TUTTE le primitive di $f(x) = \frac{1}{x}$ valide per ogni $x \neq 0$.

Risposta sbagliata: $F(x) = \log |x| + C$. Infatti posso usare due C diversi per $x > 0$ e per $x < 0$

Tutte le primitive sono della forma

$$F(x) = \begin{cases} \log |x| + C_1 & \text{per } x > 0 \\ \log |x| + C_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

al variare di C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.

Morale 1: se la zona di definizione è fatta da pezzi diversi, posso usare C diversi in pezzi diversi

Morale 2: aggiungere per abitudine "+C"

- non serve per calcolare gli integrali
- non basta in generale per descrivere tutte le primitive.

Quindi è un'abitudine da perdere.

— o — o —

Tecniche di integrazione = come trovare una primitiva di una funzione data

Casi semplici

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = x^\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sin R x$$

$$f(x) = \cos R x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \cos(3x)$$

$$f(x) = e^{-fx}$$

$$f(x) = 7^x = e^{x \log 7}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$f(x) = x \cos(x^2)$$

$$f(x) = x^2 e^{-x^3}$$

$$F(x) = e^x$$

$$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\& \alpha \neq -1)$$

$$F(x) = \log |x|$$

$$F(x) = -\cos x$$

$$F(x) = \sin x$$

$$F(x) = \cos R x$$

$$F(x) = \sin R x$$

$$F(x) = \arctan x$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{f} e^{-fx}$$

$$F(x) = \frac{1}{\log 7} 7^x$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

— o — o —