

Come si calcolano gli integrali

Procedura: devo calcolare $\int_a^b f(x) dx$ con $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Cerco una funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia continua in $[a, b]$ e derivabile almeno in (a, b) con

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Notazione

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si dice primitiva di f una qualunque funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- F è continua in $[a, b]$
- F è derivabile in (a, b) (almeno)
- $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.

(In inglese: primitiva = ANTIDERIVATIVE)

Lemma 1 Siano F_1 ed F_2 due primitive di $f(x)$ in $[a, b]$.

Allora la funzione $F_2(x) - F_1(x)$ è costante in $[a, b]$, cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_2(x) = F_1(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

Dim. Pongo $G(x) := F_2(x) - F_1(x)$. Allora

- G è continua in $[a, b]$
- G è derivabile in (a, b)

• $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$
 Posso applicare Lagrange a $G(x)$ e ottengo che per ogni $x \in (a,b]$ esiste $c \in (a,x)$ t.c.

$$G(x) - G(a) = \underset{0}{G'(c)}(x-a) = 0$$

Quindi $G(x) = G(a)$ per ogni $x \in [a,b] \Rightarrow G(x)$ è costante.

— o — o —

Conseguenza Se F_1 ed F_2 sono 2 primitive di $f(x)$, allora

$$[F_1(x)]_a^b = [F_2(x)]_a^b$$

Dim. Per il Lemma esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $F_2(x) = F_1(x) + c$...

$$[F_2(x)]_a^b = F_1(b) + \cancel{c} - F_1(a) - \cancel{c} = [F_1(x)]_a^b$$

— o — o —

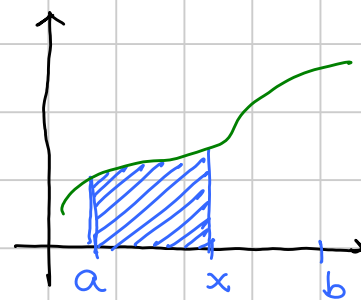
Def. Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile.

Si dice funzione integrale la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a,b]$$

↑
variabile "unita"

Sotto alla definizione bisogna verificare che se f è integrabile in $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,x]$ per ogni $x \in [a,b]$.



Proprietà ovvia della funzione integrale

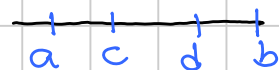
Per ogni intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ vale la relazione

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c) = [F(x)]_c^d$$

Dim. Per l'additività dell'integrale rispetto alla zona di integrazione si ha che

$$\int_a^d f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{F(d)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{F(c)}$



Sottraendo la tesi.

— o — o —

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione integrale è una primitiva di f .

Teorema (Teorema della media integrale)
(Mean value thm. for integrals)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora esiste almeno un p.to $c \in [a, b]$ (addirittura $c \in (a, b)$) tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

A POSTERIORI questo è un Lagrange per la funzione integrale.

Dim. Essendo f continua, per f ha min m e max M in $[a, b]$. Allora è facile vedere che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(confronto con rettangolo
le sopra e sotto)

e quindi

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\lambda} \leq M$$

Poiché $m \leq \lambda \leq M$, per il teorema di esistenza dei valori intermedi esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \lambda$, il che è equivalente alla tesi. $\square$

— o — o —

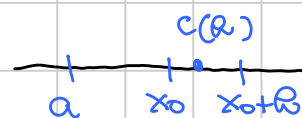
Dim. teo. fondamentale Sia $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ la funzione integrale. Sia $x_0 \in (a, b)$.

Voglio dim. che $F'(x_0)$ esiste e vale $f(x_0)$.

Faccio il rapporto incrementale, iniziando con il caso $R > 0$

$$\frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{R} = \frac{1}{\textcircled{R}} \int_{x_0}^{x_0+R} f(t) dt$$

↑
lunghezza intervallo
di integrazione



$$= f(c(R)) \text{ per un opportuno } c(R) \in [x_0, x_0+R]$$

Posso concludere in 2 modi equivalenti

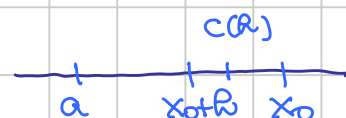
- 1° modo: quando $R \rightarrow 0^+$, ho che $c(R) \rightarrow x_0^+$ (carabinieri) quindi

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} f(c(R)) = \lim_{\substack{y \rightarrow x_0^+ \\ y = c(R)}} f(y) \stackrel{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua} \\ \text{in } x_0}}{=} f(x_0)$$

- 2° modo: per ogni $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta]$ quindi non appena $R \leq \delta$ si ha che

$$\left| \frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{R} - f(x_0) \right| = |f(c(R)) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Facciamo ora il caso con $R < 0$



$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{R} &= \frac{1}{R} \left(- \int_{x_0+R}^{x_0} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\textcircled{-R}} \int_{x_0+R}^{x_0} f(t) dt = f(c(R)) \end{aligned}$$

↑
ampiezza intervallo

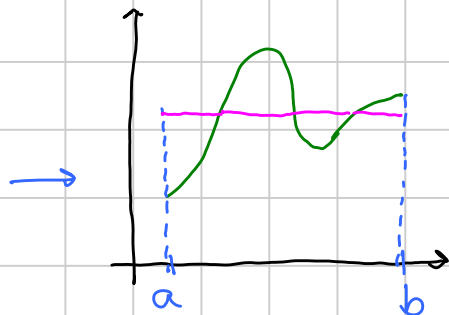
e la conclusione segue come sopra.

Oss 1 Nel teorema della media integrale il valore

$$\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

rappresenta "il valor medio di $f(x)$ in $[a,b]$ ", cioè il valore che dovrebbe avere una funzione costante per avere lo stesso integrale di f in $[a,b]$

le aree sopra λ e sotto λ si devono compensare



Oss. 2 Cosa posso dire sempre della funzione integrale anche quando $f(x)$ non è continua?

Posto $M := \sup \{ |f(x)| : x \in [a,b] \}$ si ha che $F(x)$ è Lipschitziana con costante M , cioè

$$|F(x) - F(y)| \leq M |x - y| \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in [a,b]$$

Dim. wlog $x \geq y$. Allora

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \int_y^x |f(t)| dt \\ &\leq \int_y^x M dt = M(x-y) \\ &= M|x-y|. \end{aligned}$$

— o — o —