

Formula di Taylor con resto di LagrangeCaso con centro in $x_0=0$

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \text{funzione} \\ \text{"strana"}}} = \underbrace{P_n(x)}_{\substack{\uparrow \text{polinomio}}} + \underbrace{o(x^n)}_{\substack{\uparrow \text{resto alla PEANO}}}$$

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

resto di Lagrange

è come se fosse il termine successivo solo con la derivata calcolata in c e non in 0.

Teorema misterioso Sia $\delta > 0$ e sia $f: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia derivabile $(n+1)$ volte in $(-\delta, \delta)$. Sia $m \in \mathbb{N}$. Sia $P_m(x)$ il pol. di Taylor di f di grado $\leq m$ dato dalla solita formula.

Allora per ogni $x \in (-\delta, \delta)$ esiste c compreso tra x e 0 tale che vale la formula di sopra.



Oss. Se prendo $n=0$ ottengo $P_0(x) = f(0)$ e la formula diventa

$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$$

e questo è il tes. di Lagrange.

Esempio 1 Approssimare $\sin \frac{1}{10}$ con una frazione.

Uso Taylor per approssimarlo con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5$$

Se al posto di $\sin \frac{1}{10}$ io scrivo $\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = \frac{599}{6000}$

commetto un errore che è $\frac{f^{(5)}(c)}{120} \cdot \frac{1}{10^5}$.

Per non conoscendo c , so che $|f^{(5)}(c)| = |\cos c| \leq 1$, quindi

$$|\text{errore}| \leq \frac{1}{12.000.000}$$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}1\dots \qquad \frac{599}{6000} = 0,099833\boxed{3}$$

— 0 — 0 —

Oss. La formula vale anche con centro x_0 generico:

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

dove c sta tra x_0 e $x_0 + h$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1° modo: porto a sx e faccio lo studio di funzione.

2° modo: Taylor-Lagrange con $n=1$

$$f(x) \geq P_1(x) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2$$

$$e^x = 1+x + \underbrace{\frac{e^c}{2} x^2}_{\geq 0} \geq 1+x$$

(La disug. è stretta se $x \neq 0$)

Esempio 2bis Se uso ordine 2 ottengo

$$e^x = 1+x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} e^c x^3$$

ha lo stesso segno di x

e di conseguenza

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2} x^2 \quad (\Rightarrow x \geq 0)$$

Esempio 3 Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dimi Chiamo $S_n(x)$ la somma parziale n -esima, che in realtà è $P_n(x)$ (il pd. di Taylor di grado n di $f(x) = e^x$)
Per Taylor-Lagrange

$$e^x - S_n(x) = e^x - P_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\text{quindi } 0 \leq |e^x - S_n(x)| \leq \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

non so dove sta c ,
ma sta tra 0 e x ,
quindi $c \leq |x|$

Fissato x , è ovvio che $\text{RHS} \rightarrow 0$, quindi $\text{LHS} \rightarrow 0$

Esempio 4 Allo stesso modo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

Infatti

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}$$

derivata $(2n+2)$ -esima
in un p.to c

Ancora una volta, fissato x il resto tende a 0 ($x \in \mathbb{R}$ qualunque)

Def. Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte, si dice **SERIE DI TAYLOR** di $f(x)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$$

serie di potenze:
"polinomio di grado infinito"

cioè la serie (in cui x è pensato come parametro) che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Fatto: con Taylor-Lagrange si può dimostrare che, per opportuni valori della x e per opportune $f(x)$, la serie converge proprio ad $f(x)$.

Def. Quando succede che $f(x)$ è la somma della sua serie di Taylor in un certo intervallo si dice che $f(x)$ è **ANALITICA** in quell'intervallo e si indica con

$$f \in C^{\omega}((a,b))$$

Esempio $f(x) = \log(1+x)$

Dove è vero che $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$?

Certamente non per $x > 1$, perché lì la serie non converge

Idem per $x \leq -1$,

Per $x \in (-1, 1)$ posso applicare Taylor-Lagrange (basta usare l'espressione per la derivata $(n+1)$ -esima,

In particolare

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots = \log \frac{4}{3}$$

— 0 — 0 —