

WEIERSTRASS GENERALIZZATOSia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.**Dim.** Considero $f(213)$.Per il limite a $-\infty$ esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq f(213) \quad \forall x \leq A$$

Per il limite a $+\infty$ esiste $B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq f(213) \quad \forall x \geq B$$

Wlog posso assumere $B > A$, anzi posso assumere $A < 213 < B$

Per W vero esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

Dico che è il minimo anche su tutto $\mathbb{R}$.Prendo $x \in \mathbb{R}$ e dimostro che $f(x) \geq m$. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [A, B]$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m .
- Se $x \leq A$, allora

$$f(x) \geq f(213) \geq m$$

def. di A

perché $213 \in [A, B]$, quindi
213 ha giocato nella gara
per la definizione di m

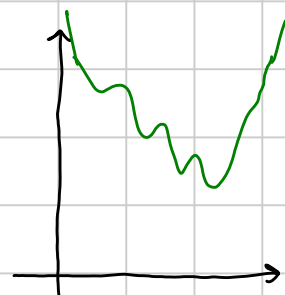
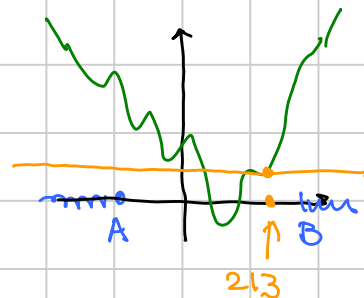
- Se $x \geq B$, allora è come il p.to precedente.

— o — o —

Del tutto analogo: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

allora esiste il minimo (esercizio).



Ancora più generale Quello che abbiamo veramente usato è

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua
- esiste un intervallo $[A, B]$ ed esiste $x_0 \in [A, B]$ t.c.

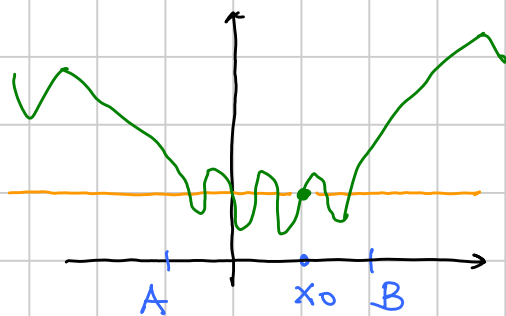
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \geq B$$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \leq A$$

Sotto queste ipotesi

$$\min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

$$= \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$



— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^{14} - \log(1+x^{20}) + x^7 \sin x$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? è surgettiva?

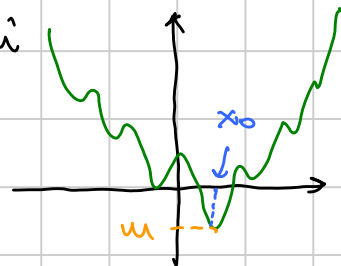
Si vede subito che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Quindi per W. generalizzato esiste il minimo, quindi addio surgettività.

L'iniettività me la gioco sul livello $m+4$, cioè l'equazione

$$f(x) = m+4$$

ha almeno 2 soluzioni, una in $(x_0, +\infty)$ una in $(-\infty, x_0)$ per il teorema dei valori intermedi.



Esempio 2 $f(x) = x^4 - \log(1+x^{20}) + x^7 \cos x$

Come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? surgettiva?

$x=0$
 $\downarrow$
 in 0 si comporta
 come $x^4 \Rightarrow$ min. loc.
 $\Rightarrow$ addio iniettività

Per la surgettività considero la successione

$$a_n = 2\pi n \quad (\cos i \cos = 1)$$

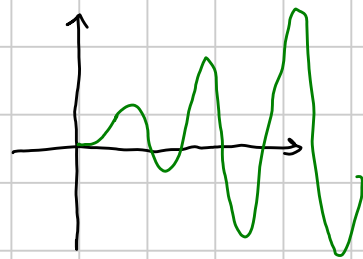
$$b_n = 2\pi n + \pi \quad (\cos i \cos = -1)$$

Si vede facilmente che

$$f(a_n) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) \rightarrow -\infty$$

Quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ trovo un p.to in cui vale $-$ e un p.to in cui vale $+$. Concluso per esistenza degli zeri.

— o — o —



Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$$

Domande: esistono max / min ? *Non è detto (arctan x)*
può essere surgettiva ? *NO*

Dim non surgettività Prendo $m = \min\{l_1, l_2\}$. Ho 2 casi

- se $f(x) \geq m$ sempre, allora addio surgettività
- se $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < m$, allora f ammette un minimo $m_1 \in \mathbb{R}$ ($m_1 < m$) e quindi addio surgettività

Per il limite a $-\infty$ esiste $B < x_0$

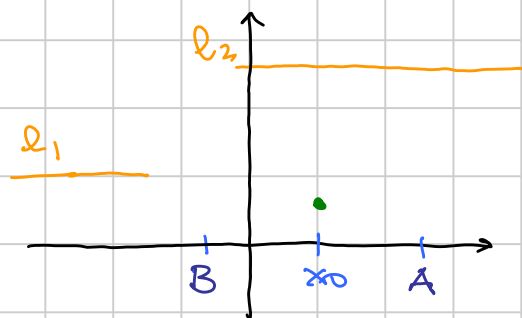
$$\text{t.c.} \quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x \leq B$$

Per il limite a $+\infty$ esiste $A > x_0$

$$\text{t.c.} \quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x \geq A$$

A quel p.to il minimo in $[B, A]$ è il minimo generale.

— o — o —



Esercizio Consideriamo l'equazione

$$\underbrace{\sin x - 10^x \cos(x^2) + x^3 \arctan x}_{f(x)} = \lambda$$

È evidente che $\forall \lambda \in \mathbb{R} \exists$ soluzione (surgettività).

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \lambda \geq \lambda_0$ la soluzione è unica

Derivata: $f'(x) = \cos x + \text{roba polinomiale}$
(meno forte quando $x \rightarrow +\infty$ di $\cos x$)

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

Di conseguenza $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x) > 0$ per ogni $x \geq x_0$
quindi $f: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva.

Mi piacerebbe che esistesse

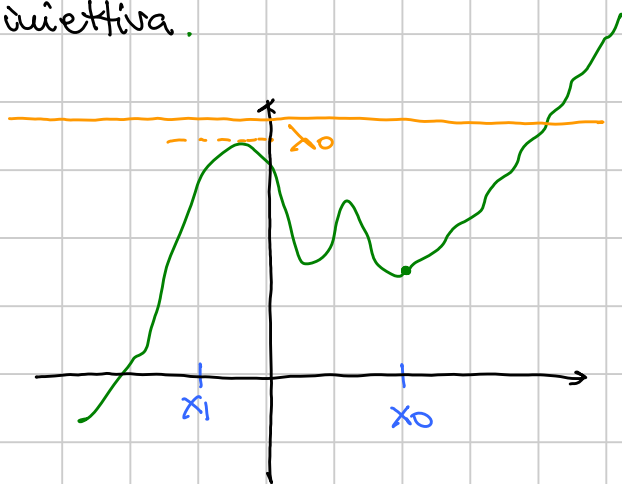
$$\max \{ f(x) : x \leq x_0 \}$$

Se esistesse questo è il λ_0
che sto cercando

Infatti per ogni $\lambda > \lambda_0$ la

soluzione di $f(x) = \lambda$ (che so già

esistere) sarà per forza $\geq x_0$ (prima non può essere perché λ_0 è il max) e dopo x_0 è unica per iniettività.



Per dimostrare l'esistenza del max per $x \leq x_0$ bisogna fare un Weierstrass generalizzata.

Basta prendere $x_1 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \leq x_1$$

e poi dimostrare al solito modo (farlo!) che il max in $[x_1, x_0]$
è in realtà anche il max in $(-\infty, x_0]$