

Criterio del confronto asintotico Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $b_n > 0$ e $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \text{ (caso standard)}$$

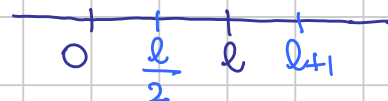
Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \text{(il valore a cui converge, no può essere diverso)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

Utilizzo operativo Data $\sum a_n$, con a_n complicato, cerco una b_n nota per cui funziona il criterio.

Dim Poiché $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora



definitivamente si avrà che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1$$

Moltiplico moltiplicando per b_n (che è > 0):

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq (l+1) b_n.$$

Conclusione: $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum (l+1) b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
↑
disug. $\times$ + confronto

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{l}{2} b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$. $\square$
↑
disug. $\times$ + confronto.

Confronto asintotico (casi limite)

$$(1) a_n \geq 0, b_n > 0, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$$

[definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$ defn., quindi]

$$\text{allora } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$(2) a_n \geq 0, b_n > 0, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

[definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ defn....]

$$\text{allora } \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Oss. Le implicazioni non scritte in generale non valgono.
— 0 — 0 —

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE ($a \geq 1 \leadsto$ armonica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Dimostrazioni di questi fatti:

- ① Criterio di condensazione di CAUCHY
- ② Disuguaglianze dirette
- ③ Confronto serie - integrali

Criterio di condensazione di Cauchy

Sia a_n una succ. tale che

(i) $a_n \geq 0$ definitivamente

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

(iii) $a_n \rightarrow 0$ (questa in realtà non serve)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$$

$\uparrow$
termini i cui indici
sono potenze di 2

Applicazione La successione $a_n = \frac{1}{n^a}$ verifica le ipotesi per ogni $a > 0$.

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{na}} < +\infty \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^a}\right)^n \end{aligned}$$

Questa è una serie geometrica, quindi converge se e solo se $\frac{2}{2^a} < 1$, cioè se e solo se $a > 1$.

Esercizio Vedere cosa succede con $a_n = \frac{1}{n \log^a n}$

(risposta: diventa l'armonica precedente).
— 0 — 0 —

Dim. condensazione di Cauchy

$$a_1 | a_2 | a_3 \quad a_4 | a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 | a_9 \dots a_{16} | \dots$$

Maggiorazione:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^m} \leq a_1 + a_2 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^{m-1} a_{2^{m-1}}$$

Minorazione

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^n} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n}$$

Detto formalmente

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k a_{2^k}$$

Formalmente si dimostra per induzione

Allora ci sono 2 casi

① Se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge, allora il RHS è limitato, quindi è limitato il CHS, quindi converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

② Se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = +\infty$, allora il LHS $\rightarrow +\infty$, quindi anche CHS $\rightarrow +\infty$.

— 0 — 0 —

Alternativa 1 Posso dimostrare che $\sum \frac{1}{\underbrace{n}_{a_n}} = +\infty$ per confronto asintotico con $\sum \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{b_n}$

Infatti $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow 1$ (solito limite notevole)

Sapendo che $\sum b_n = +\infty$ (telescopica) deduco che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Alternativa 2 Dal fatto che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, posso dedurre che

$$\sum \frac{1}{n^a} = +\infty \quad \text{per ogni } a \leq 1$$

Infatti $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^a}$ se $a \leq 1$ e si conclude per confronto

Alternativa 3 Se osservo che

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$$

Ora so che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < +\infty$ perché è telescopica, quindi

deduco che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Da qui per confronto deduco che converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ per ogni $a \geq 2$.

Quello che resta scoperto è il range $a \in (1, 2)$.

Il caso $a = 2$ fornisce un ulteriore suggerimento

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

(si dimostra per induzione
oppure maggiorando con la
telescopica)

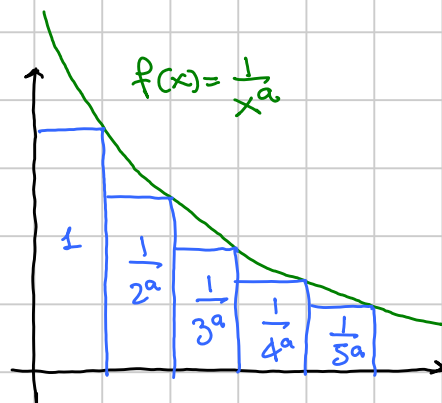
Nel caso generale posso sperare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq A - \frac{B}{(n+1)^{a-1}}$$

L'obiettivo per una dim. diretta è trovare A e B in funzione di a ,
per cui la disuguaglianza è vera.

La scorciatoia è

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^a} dx}_{\text{si sa fare}}$$



— o — o —