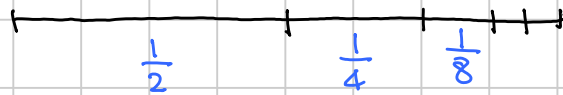


Serie vs Zenone

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

geometrica
con $a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{1-a}$

— 0 — 0 —

Teoria delle serie: stabilire se una serie converge o no SENZA avere una formula esplicita per S_n .
Il valore a cui converge per ora non interessa.

Strumenti:

Condizione necessaria

Serie a termini ≥ 0 (segno costante)

Termini a segno qualunque

- Criterio della radice
- " del rapporto
- Criterio del confronto
- Cr. del confronto asintotico:
 - * casi standard
 - * casi limite

- Criterio di LEIBNITZ
- Assoluta convergenza

— 0 — 0 —

CONDIZIONE NECESSARIA

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

Dim.:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\forall n \geq 1$$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
l

$\downarrow$
l

← sto usando che la serie converge

Quindi $a_n \rightarrow 0$. $\square$

Achtung! La condizione è necessaria, ma non SUFFICIENTE.

Quindi

- se a_n non tende a 0 (cioè tende ad altro oppure non ha limite), allora la serie non converge, quindi restano aperte 3 possibilità,
- se $a_n \rightarrow 0$, allora restano aperte tutte le 4 possibilità.

Fatto generale Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora S_n è debolmente crescente definitivamente, quindi (teo. succ. monotone) ci sono solo 2 possibilità:

- $S_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ (cioè la serie converge)
- $S_n \rightarrow +\infty$ (cioè la serie diverge a $+\infty$).

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3n+1}{5n^2-700}}_{a_n} = +\infty$

$a_n \geq 0$ definitivamente, quindi o converge, o diverge a $+\infty$.

$a_n \rightarrow \frac{1}{5}$ quindi la cond. nec. non funziona, quindi non può convergere. Resta solo che diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente.}$$

Allora valgono queste due implicazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \end{aligned}$$

Dim. wlog l'ipotesi valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$S_n^a \leq S_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, vuol dire che $S_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora per confronto a 2 tra limiti anche $S_n^b \rightarrow +\infty$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

(oss.: fino a qui non ho usato che i termini sono ≥ 0)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, vuol dire che $S_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma allora

S_n^b è limitata (volendo proprio da l), ma allora S_n^a è limitata, ma allora (essendo debolmente crescente) S_n^a tende ad un limite reale ($\leq l$).

↑
qui ho usato l'ipotesi
che i termini siano ≥ 0

— o — o —

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

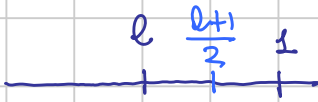
$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \quad (l \in [0, +\infty) \text{ opp. } l = +\infty)$$

Allora

- se $l > 1$, la serie diverge
- se $l < 1$, la serie converge
- se $l = 1$, allora BOM.

Dim. $l > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow$ condiz. nec. $\Rightarrow$ non può convergere

$l < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ OK condiz. nec. $\Rightarrow$ BOM ← Falsa pista

Dim. giusta: $l < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definit. 

$$\Rightarrow a_n \leq \left(\frac{l+1}{2} \right)^n$$

"
 $b_n \rightarrow$ serie geometrica di
ragione in $(0, 1)$

quindi $\sum b_n < +\infty$, ma allora $\sum a_n$ converge.

Criterio del rapporto Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$$

Allora... esattamente come la radice

Dim. $l > 1 \Rightarrow$ NO cond. necessaria

$$l < 1, \text{ allora definitivamente } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$$

da cui per induzione si ottiene (come per i limiti)

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-m_0} a_{m_0} \quad \forall n \geq m_0$$

cioè

$$a_n \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica con} \\ \text{ragione } < 1}} \underbrace{\frac{a_{m_0}}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{m_0}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}$$

Si conclude come prima per confronto con la geometrica. $\square$

— o — o —