

SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

brutalmente è la somma di tutti i termini di una data succ.  $a_n$

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Def. Data una succ.  $a_n$ , si definisce la successione  $S_n$  delle somme parziali

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

non è una serie, ma una sommatoria finita

A quel p.to si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Da buon limite, ci sono 4 possibilità:

- ①  $S_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora si dice che la serie converge ad  $l$
- ②-③  $S_n \rightarrow +\infty$  opp.  $S_n \rightarrow -\infty$ , allora si dice che la serie diverge a  $+\infty$  opp.  $-\infty$
- ④  $S_n$  non ha limite, allora la serie è indeterminata.

Esempi banali Se  $a_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $S_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi la serie converge a 0.

Se  $a_n = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $S_n = n+1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi la serie diverge a  $+\infty$ .

Se  $a_n = (-1)^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $S_n = 1$  per  $n$  pari e  $S_n = 0$  per  $n$  dispari, quindi la serie è indeterminata.

[Le formule per  $S_n$  avrebbero dim. per induzione].

variante banale: cosa vuol dire  $\sum_{n=77}^{\infty} a_n$ ?

Vuol dire che definisco  $S_n := a_{77} + a_{78} + \dots + a_n$  per ogni  $n \geq 77$  e poi faccio il limite del nuovo  $S_n$ .

Oss. banale Siano  $a_n$  e  $\hat{a}_n$  due successioni tali che

$$a_n = \hat{a}_n \quad \text{definitivamente}$$

(cioè possono differire solo per un numero finito di termini). Allora le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n$$

hanno lo stesso tipo di comportamento (cioè una converge/div. se e solo se lo è l'altra, ma l'eventuale  $Q$  può essere diverso).

Dim. Sia  $n_0$  t.c.  $a_n = \hat{a}_n$  per ogni  $n \geq n_0$ . Siano  $S_n$  e  $\hat{S}_n$  le due succ. delle somme parziali. Allora

$$S_n - S_{n_0} = \hat{S}_n - \hat{S}_{n_0} \quad \forall n \geq n_0 \quad (\text{facile inclusione})$$

$$\text{quindi} \quad \hat{S}_n = S_n + \underbrace{(\hat{S}_{n_0} - S_{n_0})}_{\text{numero fisso}} \quad \forall n \geq n_0$$

Per fatti noti sui limiti  $\hat{S}_n$  e  $S_n$  hanno lo stesso comportamento (teo. somma).

— o — o —

Due classi speciali:  $\rightarrow$  SERIE TELESCOPICHE  
 $\rightarrow$  SERIE GEOMETRICHE

## SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

Oss. chiave:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = S_n$$

$$1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = S_n$$

Alla fine resta solo  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Se è così  $S_n \rightarrow 1$ , quindi la serie converge a 1.

Formalmente, dimostro che  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  per induzione.

Nel passaggio induttivo, assumo che  $S_{n-1} = 1 - \frac{1}{n}$  e quindi

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{S_{n-1} \text{ per Hp indutt.}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Esempio 2  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

Osservo che  $a_n = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \dots + a_n = \\ &= \cancel{\log 2} - \cancel{\log 1} + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 2} + \cancel{\log 4} - \cancel{\log 3} + \dots + \log(n+1) - \cancel{\log n} \\ &= \log(n+1) \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge a } +\infty. \end{aligned}$$

Formalmente, dimostro per induzione che  $S_n = \log(n+1)$ .

## SERIE GEOMETRICHE Sono le serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

dove  $a$  è un numero reale FISSO

A suo tempo per induzione si ottiene  $S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

(se  $a \neq 1$ , ma se  $a = 1$  è uno degli esempi iniziali).  
Dalla formula segue la teoria, distinguendo dei casi

$a > 1$   $S_n \rightarrow +\infty$

$a = 1$   $S_n = n+1 \rightarrow +\infty$

$a \in (-1, 1)$   $S_n \rightarrow \frac{1}{1-a}$  perché  $a^{n+1} \rightarrow 0$

$a = -1$   $S_{2n} \rightarrow 1$ ,  $S_{2n+1} \rightarrow 0$ , quindi è indeterminata

$a < -1$   $S_{2n+1} \rightarrow -\infty$ ,  $S_{2n} \rightarrow +\infty$ , quindi è indet.  
 $\uparrow$   
il denom. è negativo

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \text{converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1, 1) \\ \searrow \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Oss. Le serie telescopiche e geometriche sono quasi le uniche per cui c'è una formula esplicita per  $S_n$ .

### Proprietà algebriche

Siano  $a_n$  e  $b_n$  due successioni.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con tutte le cautele tipiche del limite della somma.

Analogamente, se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

con tutte le cautele del prodotto in  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Dim.: Pongo  $c_n := a_n + b_n$ . Chiamo  $S_n^a$ ,  $S_n^b$ ,  $S_n^c$  le somme parziali relative alle 3 serie.

Allora una banale induzione ci dice che

$$S_n^c = S_n^a + S_n^b.$$

A questo punto il eventuale limite di  $S_n^c$  è legato ai limiti di  $S_n^a$  e  $S_n^b$  (teo. alg. per somma di limiti).

Dimostrazione analoga per  $\lambda a_n$ .

Achtung!  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$  non ha nulla a che fare con  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Non vale nemmeno per le somme finite

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1)$$