

Esempio 1  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left( \sinh \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

Pongo  $x = \frac{1}{n}$  e diventa  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \frac{\cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 2  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n - 1}{n^2} = 0$

$$\frac{\cancel{x} - \frac{n^2}{2} - \cancel{x} + o(n^2)}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{NO!!} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ vale}$$

quando l'argomento tende a 0

Esempio 3  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sinh x + x^4 \log x}{x \operatorname{arctan}(x^2 + x^3)} = -\frac{1}{6}$

$x^3 + o(x^3)$  quindi si decide sul 3° ordine

quello del  $\sinh x$

Non posso sviluppare  $\log x$  neanche scrivendo

$$\log x = \log [1 + \underbrace{(x-1)}_{\uparrow \text{non tende a 0}}]$$

Fortuna:  $x^4 \log x = o(x^3)$  (quando divido tende a 0)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sinh x + x^3 \log x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sinh x}{x^3} + \log x = -\frac{1}{6} - \infty = -\infty$$

Esempio 4 Sviluppare  $e^x$  di ordine 3 con centro in  $x_0 = 1$

Teoricamente uso la formula

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + f''(x_0) \frac{h^2}{2} + f'''(x_0) \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

Nel nostro caso  $f^{(k)}(x) = e^x$ , quindi  $f^{(k)}(1) = e$ , da cui

$$e^{1+h} = e + e h + e \frac{h^2}{2} + e \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

$\downarrow$

$$e \cdot e^h = e \left( 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 + o(h^3) \right)$$

Esempio 5 Sviluppare  $\sin x$  con centro in  $x_0 = 1$  e ordine 3

1° modo: fare le derivate

2° modo:  $\sin(1+h) = \sin 1 \cdot \cos h + \cos 1 \cdot \sin h$

$$= \sin 1 \left( 1 - \frac{1}{2} h^2 + o(h^3) \right) + \cos 1 \left( h - \frac{1}{6} h^3 + o(h^3) \right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot h - \frac{1}{2} \sin 1 \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cos 1 \cdot h^3 + o(h^3)$$

Esempio 6 Sviluppare  $\sin(\cos x)$  con centro in 0 e ordine 3

Non va bene:  $\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^3)$ , quindi

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6} \cos^3 x + \boxed{o(x^3)}$$

NO!

Va bene!  $\sin(\cos x) = \sin \left( \underbrace{1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)}_h \right)$  uso  $\sin(1+h)$

$$= \sin 1 + \cos 1 \left( \underbrace{-\frac{1}{2} x^2}_h \right) + o(x^3)$$

↑ un'ungia sia  $h^2$ , sia  $h^3$ , sia  $o(h^3)$

Esempio 7  $\log(2+x)$  come lo sviluppo centro in  $x_0=0$

$$\log(2+x) = \log\left[1 + \underbrace{\left(\frac{1+x}{2}\right)}_{\substack{\uparrow \text{non tende a 0! non posso usare sviluppo} \\ \text{classico}}}\right]$$

$$\begin{aligned}\log(2+x) &= \log 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) \\ &= \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3) \\ &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ &\quad t \quad -\frac{1}{2}t^2 \quad + \frac{1}{3}t^3\end{aligned}$$

Esempio 8  $x^4 + x^3 - x = p(x)$

Taylor di ordine 3 con centro in 0 :  $-x + x^3 + o(x^3)$   
" " " " " " " 2

$p(2+R) = (2+R)^4 + (2+R)^3 - (2+R)$  e faccio i conti con  
il binomio di Newton  
salvando solo i termini con  
esponente  $\leq 3$ .

Esempio 9  $f(x) = \frac{x+2}{3+x}$  Taylor di ordine 3 in 0

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3} \frac{x+2}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} (x+2) \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{3} (x+2) \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + o(x^3)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

e moltiplico salvando solo...

### Esempio 10

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$\uparrow$  Derivata di  $\arctan x$        $\uparrow$  Derivata di  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

Per rendere il discorso riguroso

→ dallo sviluppo di  $\frac{1}{1+x^2}$  deduco il valore delle derivate di  $\frac{1}{1+x^2}$  in 0

→ dalle derivate di  $\frac{1}{1+x^2}$  deduco le derivate in  $x=0$  di  $\arctan x$

→ dalle derivate di  $\arctan x$  in  $x=0$  deduco lo sviluppo di  $\arctan x$

### Esempio 11

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^3 + 7}$$

Questo si fa razionalizzando le radici cubiche.

$$\sim \left[ \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}} - \sqrt[3]{1 + \frac{7}{n^3}} \right] \dots \text{ passo alle funzioni } x = \frac{1}{n}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1 + 2x + 5x^3} - \sqrt[3]{1 + 7x^3}}{x} = \frac{1 + \frac{2}{3}x - 1 + o(x)}{x}$$

$\sqrt[3]{1+t} = (1+t)^{1/3} = 1 + \frac{t}{3} + o(t)$

$$\rightarrow \frac{2}{3}$$

Oss. Per questo limite bastano gli sviluppi (si è deciso al 1° ordine)

### Esempio 12

$$\left[ \sqrt[n]{7^n + n^7} - 7 \right] e^n$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{7^n + n^7} &= 7 \sqrt[n]{1 + \frac{n^7}{7^n}} = 7 \left( 1 + \frac{n^7}{7^n} \right)^{1/n} = 7 e^{\frac{1}{n} \log \left( 1 + \frac{n^7}{7^n} \right)} \\ &= 7 \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n^7}{7^n}} = 7 \cdot e^{\frac{n^6}{7^n}} = 7 \left( 1 + \frac{n^6}{7^n} \right) = 7 + \frac{n^6}{7^{n-1}} \end{aligned}$$

↑ Brutal mode      ↑  $e^t \sim 1+t$       ↑  $\log(1+t) \sim t$

Quindi espressione data  $\sim \frac{n^6}{7^{n-1}} \cdot e^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$

Abbiamo dim. che  $\sqrt[n]{7^n + n^7} - 7 = \frac{n^6}{7^{n-1}} + o\left(\frac{n^6}{7^{n-1}}\right)$

↑  
"ordine" di infinitesimo generalizzato

$(1 + a_n)^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n} a_n$  e il termine successivo?