

Def. Se $f(x) \sim cx^\alpha$ per $x \rightarrow 0$

oppure equivalentemente

$$f(x) = cx^\alpha + o(x^\alpha) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

si dice che

- $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α ($\alpha > 0$) per $x \rightarrow 0$
- cx^α è la parte principale di $f(x)$.

Esempi

$$\sin x \sim \boxed{x} \quad \text{parte principale}$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x \sim \boxed{-\frac{1}{6}x^3} \quad \text{parte princ.}$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{x} = 2$

$$\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 + 1 = 2$$

Si gioca sul 1° termine, quindi si fa anche con i limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + \sin x^3}{\tan^3 x} = 2 \quad \text{per lo stesso motivo: si gioca sul 1° termine dello sviluppo.}$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}$

Non si può fare con i limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2} = \frac{\overbrace{1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2}}^{e^x} - \overbrace{1 - \cancel{x}}^{\sin x} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

La battaglia si è decisa sul 2° termine.

Oss. Se sopra e sotto ci sono infinitesimi di ordine k , allora servirebbero k passaggi di Hôpital per concludere.

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\underbrace{\sqrt{x} \arctan(x\sqrt{x})}_{x^2 + o(x^2)} + \underbrace{|\sin^5 x|}_{o(x^2)}} = \frac{1}{2}$

è lo stesso limite di prima.

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{\boxed{x^2 \sin^2 x}} =$$

↑ parte principale x^4 , quindi si gioca tutto sul 4° ordine

Mi devo procurare lo sviluppo di $\sin^2 x$ di ordine 4:

$$\begin{aligned} (\sin x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{\cancel{x^4} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 5 Sviluppare $\arctan(x+x^3)$ di ordine 3

$$\arctan t = t + o(t) \rightsquigarrow \arctan(x+x^3) = x+x^3 + o(x^3)$$

↑
NO!

$$\begin{aligned} \arctan(x+x^3) &= x+x^3 + o(x+x^3) \\ &= x+x^3 + o(x) \\ &= x + o(x) \end{aligned}$$

Oss. $o(x+x^3) = o(x)$ e niente più

↑

raccoglio solo x

$$(x+x^3) \omega(x+x^3) = \cancel{x} \underbrace{(1+x^2) \omega(x+x^3)}_{\rightarrow 0}$$

Corretto: $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\begin{aligned}\arctan(x+x^3) &= (x+x^3) - \frac{1}{3}(x+x^3)^3 + o((x+x^3)^3) \\ &= x+x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$ $[1^\infty]$

$$\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}$$

Lo scrivo come e e considero il solo esponente

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x^2} \log \left[\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right] & \frac{o(x^3)}{x} = \frac{x^3 \omega(x)}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} \log \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) & = x^2 \omega(x) = o(x^2) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \rightarrow -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\log(1+t) = t + o(t)$ quindi

$$\log \left(\underbrace{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}_t \right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) + o \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right] x$ $y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} - e \right] \frac{1}{y}$$

Ni sense l'ordine di infinitesimo di $(1+y)^{\frac{1}{y}} - e$

$$\begin{aligned}
 (1+y)^{\frac{1}{y}} &= e^{\frac{1}{y} \log(1+y)} = e^{\frac{1}{y} (y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2))} \\
 &= e^{1 - \frac{1}{2}y + o(y)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2}y + o(y)} \\
 &= e \left[1 - \frac{1}{2}y + o(y) \right] = e - \frac{e}{2}y + o(y)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$(1+y)^{\frac{1}{y}} - e = \cancel{e} - \frac{e}{2}y + o(y) - \cancel{e} = -\frac{e}{2}y + o(y)$$

In conclusione

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1+y)^{\frac{1}{y}} - e}{y} = -\frac{e}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 8

$$\left(\frac{3n+1}{n+4} \right)^n - 3^n \quad [3^\infty - 3^\infty]$$

$$3^n \left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n+4} \right)^n - 3^n = 3^n \left[\underbrace{\left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n+4} \right)^n}_{1^\infty} - 1 \right] \rightarrow -\infty$$

↓ $\frac{1}{3}-4$
 e

Pongo $x = \frac{1}{n}$ e vedo che succede nella parentesi quadra

$$\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{x} + 4} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1 + \frac{x}{3}}{1 + 4x} \right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^{\frac{1}{3}-4} < 1$$

$$\left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^{\frac{1}{3}} \quad (1+4x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^4 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(1 + \frac{x}{3})} \rightarrow e^{\frac{1}{3}}$$

Achtung! Achtung!

Potrebbe $f_n = \frac{n + \frac{1}{3}}{n+4}$ è vero che $f_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Tuttavia LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

cioè se so che $f_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso dedurre solo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \leq 1$$

↑ posto che esista

— o — o —