

Teorema di De L'Hôpital Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Supponiamo che

- (i) un po' di burocrazia (dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$ e la possibilità di dividere per $g(x)$ e $g'(x)$, esistenza di $f'(x)$ e $g'(x)$)
 (ii) il limite iniziale sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
 cioè che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (gli eventuali segni - si possono portare fuori)

(iii) esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \text{ (stesso } l)$$

Operativamente. Devo calcolare il limite di $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)}}$. Calcolo invece il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\rightarrow$ che ho verificato essere $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

- ① Se questo non esiste, allora BOH (non posso dedurre nulla sul limite iniziale)
- ② Se esiste, allora 😊
- ③ Se è ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, allora posso reiterare, cioè calcolare il limite di $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ e così via.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1} = 0$

↑
No! Non è $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

In realtà il limite fa $+\infty$ $\left[\frac{1}{0^+}\right]$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sin x}{3} = \text{N.E.}$

↑
No! Se $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, allora non posso dedurre nulla sul limite iniziale

Infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \boxed{\frac{\cos x}{x}}}{3} = \frac{2}{3}$

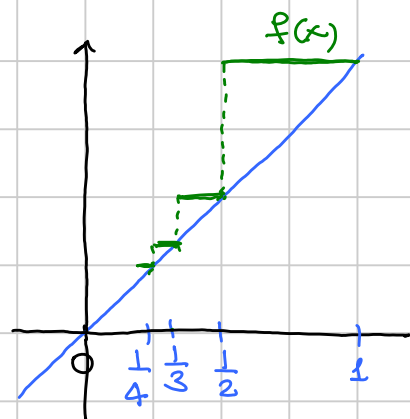
0 (carabinieri)

Oss. Quando si applica De L'Hôpital non basta che x_0 sia un p.to di accumulazione dell'insieme dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$ (così come se $x_0 = +\infty$ non basta che l'insieme di definizione di $f(x)$ e $g(x)$ sia non limitato).

Serve che $f(x)$ e $g(x)$ siano definite almeno in tutto un intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ oppure $(x_0 - \delta, x_0)$ per qualche $\delta > 0$ (oppure su tutta una semiretta nel caso $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$)

Esempio 3 Prendiamo $g(x) = x^2$

Prendiamo $f(x)$ costante a tratti negli intervalli $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ dove è uguale a $\frac{1}{k}$



$f(x)$ e $g(x)$ sono definite in $\mathbb{R}$ meno i p.ti della successione $\frac{1}{n}$. Ovviamente 0 è p.to di accumulazione per questa zona.

$f'(x) = \infty$ dove definita

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

Oss. L' utilità pratica è limitata dal fatto che derivando spesso le funzioni peggiorano.

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

$\downarrow$
 1
 $[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}]$

In alternativa: uso il fatto che $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$ e ottengo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1.$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ $[\frac{0}{0} : \text{H\ddot{o}p}]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} (-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x-x^2+2x}} \cdot 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Oss. L'esempio 5 ci dice che

$$\arccos(1-x) = \sqrt{2} \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Oss. Si può usare H\ddot{o}p. per limiti di successioni solo dopo aver usato il criterio funzioni $\rightarrow$ successioni.

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3}$

1° modo Uso limiti notevoli

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{x \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) + x^5}{x^3} = \frac{x^5}{x^3} = x^2 \rightarrow 0$$

2° modo Uso di equivalenza asintotica: $\sin x \sim x$

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \sim \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^5}{x^3} = x^2 \rightarrow 0$$

3° modo Uso di Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 5x^4}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} : \text{Hôp} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 20x^3}{6x} = \left[\frac{0}{0} : \text{Hôp} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 60x^2}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Commenti: nel 1° modo ho fatto il limite metà per volta.

Nel 2° modo ho usato l'equiv. asintotica, che non si può usare se avessi messo 0 piccolo, avrei trovato

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + x^5}{x^3} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

Oss. Posso usare Hôpital per calcolare $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$? o per

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} ?$$