

SIMBOLI DI LANDAU

(Linguaggio degli infinitesimi)

 $\rightarrow o$ piccolo (utile per i limiti) $\rightarrow O$ grande $\rightarrow \sim$ (equivalenza asintotica)

[o piccolo] Siano date $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$. Sia x_0 un p.to in cui ha senso fare i limiti ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$).

Si dice che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Detto altrimenti, $f(x) = g(x) \cdot q.c. \text{ che tende a } 0 \text{ per } x \rightarrow x_0$

Def. quasi equivalente **[Se]** ^{se $g(x) \neq 0$ per $x \in D \setminus \{x_0\}$} posso dividere per $g(x)$, allora la def. diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Brutalmente: f è o piccolo di g se " f batte g " quando faccio il limite per $x \rightarrow x_0$

[Equivalenza asintotica] Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste $w: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Esempi Da qui in poi $x_0 = 0$

① $x^3 = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Def. uff.: $x^3 = x^2 \cdot x$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $f(x) \quad g(x) \quad w(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$

Def. quasi equiv.: per $x \neq 0$ posso dividere per x^2 e mi trovo a verificare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Può essere generale $x^a = o(x^b)$ per $x \rightarrow 0$ se e solo se $a > b$

② $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \rightarrow 0$ anche se nessuna delle due tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

③ $\arctan^2 x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Def. quasi equiv.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cdot \boxed{x} = 0$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad 0$

④ $\tan x \cdot \arcsin x^2 = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Def. quasi equiv.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \arcsin x^2}{x^2} = 0$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad y = x^2$
 1

Oss. Negli esempi ③ e ④ potrei scrivere

$$\arctan^2 x \sim x^2$$

$$\tan x \cdot \arcsin x^2 \sim x^3$$

Proprietà di o piccolo Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x))$$

$$f_2(x) = o(g(x))$$

per $x \rightarrow x_0$

$f_1 + f_2$ Dico che $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$

Dim.: $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$

$$f_2(x) = g(x) w_2(x)$$

Allora $f_1(x) + f_2(x) = g(x) \underbrace{[w_1(x) + w_2(x)]}_{w_3(x) \rightarrow 0+0=0}$

$a f_1$ con $a \in \mathbb{R}$ Dico che $a f_1(x) = o(g(x))$

Dim.: $a f_1(x) = a g(x) \cdot w_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{a w_1(x)}_{w_3(x) \rightarrow a \cdot 0 = 0}$

$f_1 \cdot f_2$ Dico che $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$

Dim.: $f_1(x) \cdot f_2(x) = g^2(x) \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0}$

$\frac{f_1}{f_2}$ Nulla di furbo !!! $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot w_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot w_2(x)}$ BOH !!!

Brutalmente: f_1 batte g , f_2 batte g , ma chi vince tra f_1 ed f_2 non si sa.

Transitività Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e
 $g(x) = o(h(x))$ per $x \rightarrow x_0$

allora

$$f(x) = o(h(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Dim. Per ipotesi abbiamo $f(x) = g(x) \cdot w_1(x)$ con $w_1(x) \rightarrow 0$
 $g(x) = R(x) \cdot w_2(x)$ con $w_2(x) \rightarrow 0$

Ma allora

$$f(x) = R(x) \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0.} \quad \square$$

Con un po' di abuso di notazione possiamo riassumere le proprietà come

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

$$\alpha o(g) = o(g)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH}$$

Esempio 1 Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Cosa posso dire di

$$x \cdot f^2(x) \quad ?$$

Posso dire che è $o(x^5)$.

Dim. Per ipotesi $f(x) = x^2 \cdot w(x)$ con $w(x) \rightarrow 0$

Ma allora

$$x \cdot f^2(x) = x \cdot x^4 \cdot w^2(x) = x^5 \cdot \boxed{w^2(x)} \\ \hookrightarrow w_1(x) \rightarrow 0$$

Esempio 2 Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Cosa posso dire di

$$f(\arctan x) \quad ?$$

Cosa posso dire di

$$\arctan(f(x)) \quad ?$$

Dim. L'ipotesi dice che $f(x) = x^2 \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) \rightarrow 0$
nel 1° caso

$$f(\arctan x) = \arctan^2 x \cdot \boxed{\omega(\arctan x)}$$

$\omega_1(x) \rightarrow 0$ per cambio variabili

Per ora ho dimostrato che $f(\arctan x) = o(\arctan^2 x)$

Ma avrei anche potuto scrivere

$$f(\arctan x) = x^2 \cdot \boxed{\frac{\arctan^2 x}{x^2} \cdot \omega(\arctan x)}$$

$$\omega_1(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

Quindi ora so che $f(\arctan x) = o(x^2)$

Per il 2° ho che

$$\arctan(f(x)) = \arctan(x^2 \cdot \omega(x))$$

$$= x^2 \cdot \boxed{\omega(x)} \cdot \boxed{\frac{\arctan(x^2 \cdot \omega(x))}{x^2 \cdot \omega(x)}}$$

↓
0

↓ per cambio di variabili
1 $y = x^2 \omega(x) \rightarrow 0$

Quindi $\arctan(f(x)) = o(x^2)$.

Oss. Sono stato un po' impreciso nel dividere per $x^2 \omega(x)$ che potrebbe annullarsi anche per $x \neq 0$.

— 0 — 0 —