

Esempio 1 $\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{A}} - \frac{n}{\sqrt{B}} \quad [+\infty - \infty]$

Rationalizzazione: $(\sqrt{A} - \sqrt{B}) \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

Diventa: $\frac{\cancel{n^2} + 3n + 1 - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+3n+1} + n} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \frac{\cancel{n} \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n} \left(\sqrt{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1\right)}$

Esempio 2 $\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n-7}}{\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+91}}$

Rationalizzo sopra e sotto

$$\frac{(\cancel{n}+3) - (\cancel{n}-7)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-7}} \cdot \frac{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+91}}{(\cancel{2n}+5) - (\cancel{2n}+91)} = \frac{10}{-86} \cdot \frac{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+91}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-7}}$$

$\downarrow$
 $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

Esempio 3 $\sqrt[3]{u^3+2u^2+1} - \sqrt[3]{n^3+5}$

Come rationalizzo $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$. Si parte da $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Ponendo

$a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$ si ottiene

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}$$

$$\sqrt[3]{\dots} - \sqrt[3]{\dots} = \frac{\cancel{n^3} + 2n^2 + 1 - \cancel{n^3} - 5}{\sqrt[3]{(u^3+2u^2+1)^2} + \sqrt[3]{(\quad)(\quad)} + \sqrt[3]{(u^3+5)^2}} \rightarrow \frac{2}{3}$$

Esercizio Capire come si razionalizza $\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\arcsin x} \quad \frac{[1-1]}{[0]} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\arcsin x} + \frac{1 - \cos x}{\arcsin x} \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \frac{x}{\arcsin x} \cdot x$$

$\downarrow \frac{1}{2} \quad \downarrow 0 \quad \downarrow \frac{1}{2} \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 0$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x + x - x}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow \frac{1}{2}$

Esempio 5 $\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt[3]{3n+1}}{\sqrt{n+4}} \rightarrow \sqrt{2} \quad \sim \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{2}$

Non serve a nulla razionalizzare, comandano i termini in $\sqrt{n}$,

Esempio 6 $\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

Raccolgo di comanda $n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)$

$$= \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}}$$

e questo è legato al

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} = 0$$

$\downarrow 0 \quad \downarrow 0$

(si fanno razionalizzando)

— 0 — 0 —

Esempio 7

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}, \quad a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}, \dots$$

$a_n \rightarrow ?$ $a_n \rightarrow 0$ perché tutti i termini tendono a 0.

I termini vanno a 0, ma il numero dei termini va a $+\infty$, quindi in un certo senso è $0 \cdot \infty$ e non si può usare il po. algebrico (vale solo se il numero di addendi è FISSO).

Sol. decente:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$$

Annotations:
 - 0 and a_n are boxed in orange with arrows pointing to 0 .
 - $\frac{1}{n^2}$ is circled in blue with an arrow pointing to 0 and the label "termine + grande".
 - $(n+1)$ is boxed in blue with an arrow pointing to it and the label "numero dei termini".

Quindi $a_n \rightarrow 0$ per i carabinieri.

Esempio 8

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Annotations:
 - $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, and $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ have arrows pointing down to 0 .

Invece $a_n \rightarrow +\infty$ perché

$$a_n \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Annotations:
 - a_n is circled in orange with an arrow pointing to $+\infty$.
 - $(n+1)$ is boxed in blue with an arrow pointing to it and the label "numero dei termini".
 - $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ is boxed in blue with an arrow pointing to it and the label "termine + piccolo".
 - The entire right-hand side is circled in orange with an arrow pointing to $+\infty$.

Esempio 9

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad [0^0]$$

$$x^x = e^{x \log x} \rightarrow e^0 = 1$$

$x \log x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$
(limite dimenticato)

Esempio 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\log(\sin x^2)} \quad \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right]$$

$$\frac{\log x}{\log \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x^2} \stackrel{\text{precorso}}{=} \frac{\log x}{2 \log x + \log \frac{\sin x^2}{x^2}} \stackrel{\text{raccolgo log}}{=} \frac{1}{2 + \frac{\log \frac{\sin x^2}{x^2}}{\log x}} = \frac{1}{2} \quad \downarrow \frac{0}{-\infty} = 0$$

Esempio 11 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$

SLOGAN : • i limiti sono comodi per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$
 • se non sono a 0 oppure $+\infty$, ce li facciamo arrivare con opportuni cambi di variabile

In questo caso pongo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ho $y \rightarrow 0$.

Il limite diventa $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\pi - 2y - \pi} \quad \left[\frac{0}{0} \right] \text{ resta ovviamente indeterminato}$

Ora $\cos(y + \frac{\pi}{2}) \stackrel{\text{precorso}}{=} -\sin y$ quindi diventa $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{-2y} = \frac{1}{2}$

Esempio 12 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + \sin x} + x$

[Non pensare nemmeno : $\sim x + x \rightarrow -\infty$] [$\sqrt{x^2} = -x$ per $x < 0$]

Cambio variabile $y = x$ e diventa

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - y - \sin y} - y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - y - \sin y - y^2}{\sqrt{\dots} + y} = -\frac{1}{2}$$

— 0 — 0 —