

SOTTOSUCCESSIONI Come dimostro che un limite non esiste?Esercizio Negare $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$\exists l \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall l \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0}_{\text{frequentemente}} \quad |a_n - l| > \varepsilon$$

frequentemente

Fare così è una pena.

— o — o —

Sottosuccessioni(a₀) (a₁) a₂ a₃ (a₄) (a₅) a₆ (a₇) ...Brutalmente, pescare un po' di termini da una succ. a_n .Rigorosamente Sia a_n una succ. di numeri realiSia n_k una succ. strett. cresc. di numeri interi ≥ 0 .Allora a_{n_k} si dice sottosucc. di a_n .La successione n_k rappresenta gli indici che vado a pescare in a_n .Esempi ① $a_n = \frac{1}{n^2}$

$$n_k = 2k \quad a_{2k} = \frac{1}{4k^2} \quad \text{sottosucc. termini di indice pari}$$

$$n_k = 2k+1 \quad a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{" " " " dispari}$$

$$\textcircled{2} \quad a_n = 2^n \quad n_k = 3k \quad a_{n_k} = 2^{3k} = 8^k \quad (\text{indici multipli di } 3)$$

$$n_k = k! \quad a_{n_k} = 2^{k!}$$

Variante più debole Si prendono gli indici $n_k \rightarrow +\infty$ ma non necess. strett. crescenti.

Oss. Prendendo n_k strett. cresc., si ha che

$$n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{si dim. per inclusione}$$

Teorema (Limite di sottosucc.) Sia a_n una successione.

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (tipo ①, ②, ③).

Allora ogni sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow l$ (stesso l).

Dim.: Sarebbero 3 casi. Facciamo il caso $l \in \mathbb{R}$.

Ipotesi: $a_n \rightarrow l$

Tesi: $a_{n_k} \rightarrow l$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Prendo ε . Per ipotesi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Ma allora basta prendere $k_0 = n_0$. Per ogni $k \geq k_0$ avremo che

$$n_k \geq k \geq n_0, \quad \text{quindi dall'ip. } |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon. \quad \square$$

$\uparrow$
oss. prec.

Achtung! Può accadere che a_n non abbia limite, ma alcune sue sottosucc. sì.

Esempio classico

$a_n = (-1)^n$ non ha lim., ma

$$a_{2k} \rightarrow 1$$

$$a_{2k+1} \rightarrow -1$$

a_{k^2} non ha limite

$$a_{k!} \rightarrow 1$$

$a_n = (-n)^n$ non ha limite

$$a_{2k} \rightarrow +\infty$$

a_{7k+4} non ha limite.

$$a_{2k+1} \rightarrow -\infty$$

Fatto fondamentale Se a_n ammette due sottosucc. con due limiti $l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ e $l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ DIVERSI, allora a_n non ha limite.

Dim. Se per assurdo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosucc. dovrebbero tendere allo stesso $l \in \bar{\mathbb{R}}$. $\square$

Esempio 1 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ $a_0=0, a_1=1, a_2=0, a_3=-1$
 $a_4=0, a_5=1, \dots$

$$a_{2k} = \sin(k\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$a_{4k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(4k+1)\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 2 $a_n = n^7 + (-1)^n n^{11}$ non ha limite

$$a_{2k} \rightarrow +\infty \quad a_{2k+1} = (2k+1)^7 - (2k+1)^{11} \rightarrow -\infty$$

Esempio 3 $a_n = n'' + (-1)^n n^7$ tende a $+\infty$

Raccolgo n'' e ho $a_n = \boxed{n''} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^4}\right) \rightarrow +\infty$

$\downarrow$ $\downarrow$

$+\infty$ 0

(carabinieri)

— 0 — 0 —

$-\frac{1}{n^4} \leq \frac{(-1)^n}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}$

Come dimostro che

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste

$\uparrow$ può essere $+\infty, -\infty, l, l^+, l^-$

Uso il criterio funzioni $\rightarrow$ successioni "a rovescio", cioè cerco due successioni $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$ tali che

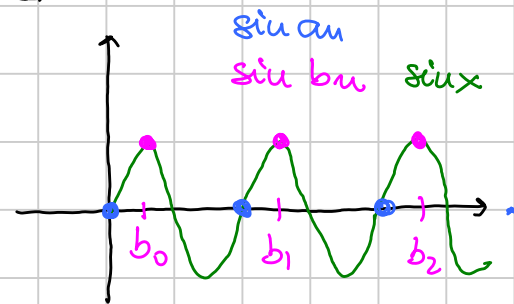
$$f(a_n) \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad f(b_n) \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}} \quad l_1 \neq l_2$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ non esiste

Formalmente, devo trovare $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c.
 $\sin(a_n) \rightarrow l_1$, $\sin(b_n) \rightarrow l_2$ e $l_1 \neq l_2$.

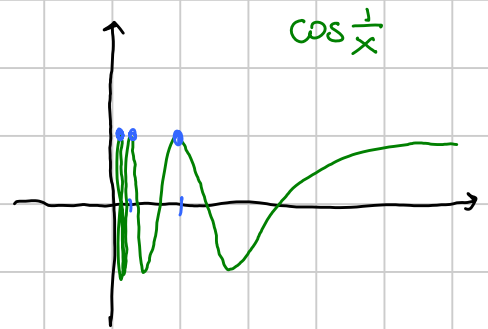
$$a_n = 2\pi n \rightarrow +\infty \text{ e } \sin a_n = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty \text{ e } \sin b_n = 1 \rightarrow 1$$



Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ non esiste

Mi servono due succ. $a_n \rightarrow 0^+$ e $b_n \rightarrow 0^+$
t.c. $\cos a_n$ e $\cos b_n$ abbiano comp.
diversi.



$$a_n = \frac{1}{2n\pi} . \text{ Allora } \cos \frac{1}{a_n} = \cos(2n\pi) = 1 \rightarrow 1 \text{ e } a_n \rightarrow 0^+$$

$$b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} . \text{ Allora } \cos b_n = \cos(2n\pi + \pi) = -1 \rightarrow -1 \text{ e } b_n \rightarrow 0^+$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \cos x^2)^x = +\infty$

$$\boxed{(3 + \cos(x^2))^x} \geq \boxed{2^x}$$

$+\infty$ per confronto $+\infty$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(2 + \sin x^2)^x}_{f(x)}$ non esiste

Devo trovare $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c. $f(a_n)$ e $f(b_n)$ si comportino diversamente.

Scelgo a_n in modo che $\sin a_n^2 = 0$, ad esempio $a_n = \sqrt{2\pi n}$.
Allora $a_n \rightarrow +\infty$ e

$$f(a_n) = (2 + \sin a_n^2)^{a_n} = 2^{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow +\infty.$$

Scelgo b_n in modo che $\sin b_n^2 = -1$, ad es. $b_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$.
Allora $b_n \rightarrow +\infty$ e

$$f(b_n) = (2 + \sin b_n^2)^{b_n} = 1 \rightarrow 1.$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(3 + \log x)}{\log(3 + \sin x)} \quad f(x)$

Prendo a_n in modo tale che $\sin(\dots) = 1$, ad esempio

$$3 + \log a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ quindi } a_n = e^{\frac{\pi}{2} - 3 + 2\pi n} \rightarrow +\infty$$

Prendo b_n in modo che $\sin(\dots) = -1$, ad esempio

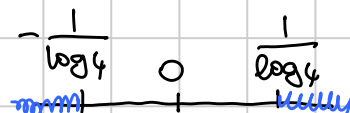
$$b_n = e^{\frac{3\pi}{2} - 3 + 2\pi n} \rightarrow +\infty$$

Ora osservo che

$$f(a_n) = \frac{1}{\log(3 + \sin a_n)} \geq \frac{1}{\log 4}$$

$$f(b_n) = \frac{-1}{\log(3 + \sin b_n)} \leq \frac{-1}{\log 4}$$

Questo impedisce al limite di esistere,
come si verifica usando i risultati
tipo "permanenza del segno".



— 0 — 0 —