

LIMITI DI FUNZIONI $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

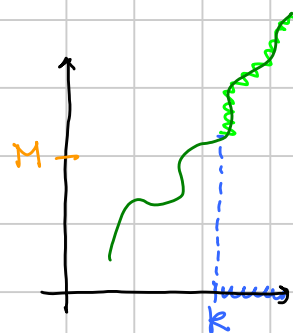
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ come prerequisito ho che D non sia limitato super.

Ci sono le solite 4 possibilità.

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

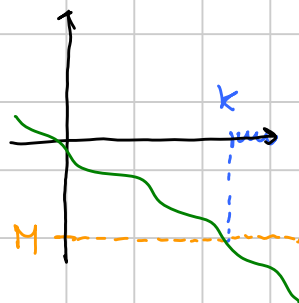
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D, x \geq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D, x \geq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in D, x \geq K$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$



Moralmente: più ε diventa piccolo, più K potrebbe diventare grande

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste se ... nessuna delle prec. è vera.

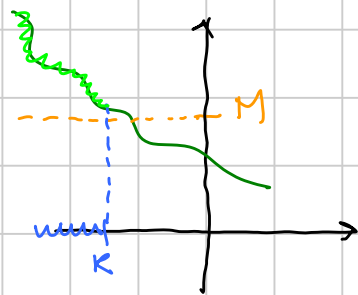
— o — o —

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ha come prerequisito che D non è limitato infer.

Def. si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D, x \leq k$

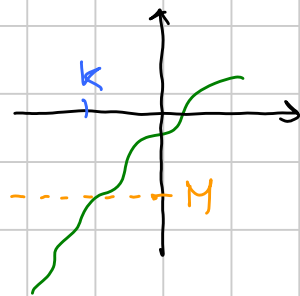


Terminologicamente: $+M$ è grande, $+k$ sarà molto negativo.

Def. si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

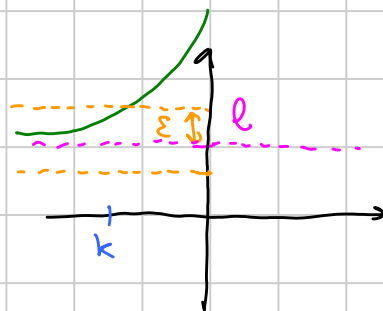
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D, x \leq k$



Def. si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$

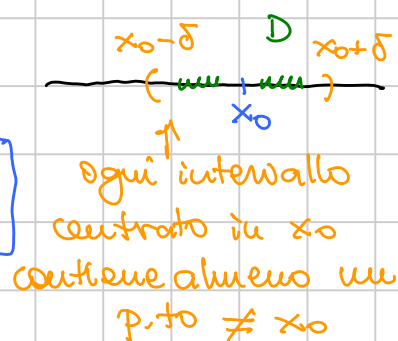
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in D, x \leq k$



Def. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ non esiste ... NDP.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ha come prerequisito che

$$\forall \delta > 0 \quad ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$



In questi casi si dice che x_0 è un p.to di accumulazione per D

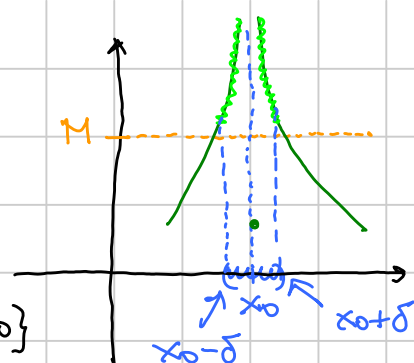
Oss. $x_0 \in D$ può non essere di accumulaz. (basta che sia isolato)
 $x_0 \notin D$ può essere di accumul. (ad es. 0 è p.to di acc. per $(0, 1)$)

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$\forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$



Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

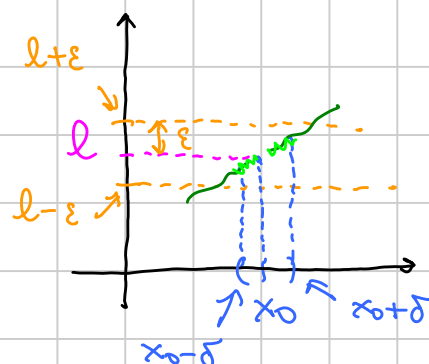
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

$\forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$



Tendenzialmente: + prendo ε piccolo, + potrebbe servire δ piccolo.

Def. ... non esiste ... nessuno dei precedenti

Limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ Prerequisito: $\forall \delta > 0$ $(x_0, x_0 + \delta] \cap D \neq \emptyset$
 $\uparrow$ esclude autom. x_0

le definizioni sono analoghe solo concludendo con
 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \cap D$

Esempi $\lim_{x \rightarrow \tau^+} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \cap D$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \tau^+$ $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$\tau < f(x) \leq \tau + \varepsilon$ $\forall x \in D, x \leq k.$

Def. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$. Si dice che f è continua in x_0 se vale uno dei seguenti due fatti!

→ x_0 è isolato in D (cioè $\exists \delta > 0$ t.c. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D = \{x_0\}$)
(nei p.ti isolati la continuità è GRATIS)

→ x_0 è di accumulazione per D e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(in particolare il limite è reale)

Def. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in D se è continua in tutti i p.ti di D ,
Volendo snocciare la definizione, se

$$\forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$$

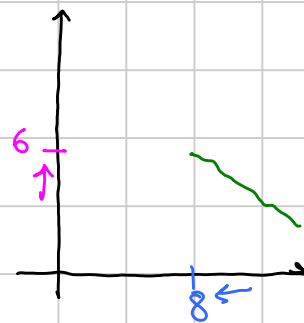
↑
 δ dipende da x_0
e da ε

se x_0 è un p.to isolato
questo insieme è $\{x_0\}$,
quindi $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
è banale

Esempi $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 6^-$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 6 - \varepsilon \leq f(x) < 6$$

$$\forall x \in (8, 8 + \delta] \cap D$$



$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 8^+$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 8 < f(x) \leq 8 + \varepsilon \quad \forall x \in [6 - \varepsilon, 6) \cap D$$

Domanda: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]?$$