

Confronti di ordini di infinito

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{3^n}{n^3}}_{a_n} \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \rightarrow 3 > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

Fatto generale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a > 1 \quad \forall b > 0$$

TABELLINA

Esponenziale batte potenza

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1,001)^n}{n^{2014}} = +\infty$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} \quad \frac{+\infty}{+\infty}$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3 \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cancel{n!} \cdot \cancel{3^n}} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Più in generale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1$$

Tabellina

FATTORIALE BATTE ESPONENZIALE

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{n^n}{n!}}_{a_n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \frac{n!}{n^n} = \frac{(\cancel{n+1})(n+1)^n \cancel{n!}}{(\cancel{n+1}) n! n^n} \\ = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

Quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^{n^2}} = 0$ (occhio: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$)

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{3^n} \xrightarrow[\text{potenza vs espon.}]{\uparrow} 0 < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Provo ad usare rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \text{ quindi } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$$

— 0 —

Oss. Non posso calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5}$ con il rapporto $\rightarrow$ radice

perché il limite di $\sqrt[n]{\text{cost}}$ serve nella dimostrazione del criterio.

— 0 — 0 —

Dall'esempio 5 segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$ per ogni $a > 0$

"
 $(\sqrt[n]{n})^a$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 7n^2 + 5} = 1$

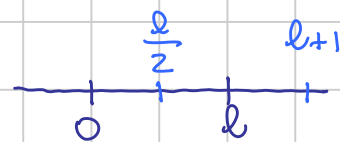
1° modo Faccio rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^3 + 7n^2 + 5$

2° modo Qui comanda si raccoglie!

$$\sqrt[n]{n^3 + 7n^2 + 5} = \underbrace{\sqrt[n]{n^3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\sqrt[n]{1 + \frac{7}{n} + \frac{5}{n^3}}}_{\downarrow 1^0 = 1}$$

Fatto generale: se $b_n \rightarrow l \in (0, +\infty)$, allora $\sqrt[n]{b_n} \rightarrow 1$

Dim.: Poiché $b_n \rightarrow l$, allora



$\frac{l}{2} \leq b_n \leq l+1$ definitivamente e quindi

$$\sqrt[n]{\frac{l}{2}} \leq \sqrt[n]{b_n} \leq \sqrt[n]{l+1} \text{ definitivamente.}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1$

Fatto generale

$$\sqrt[n]{\text{polinomio}} \rightarrow 1$$

Esempio 7

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty, \text{ quindi } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow +\infty$$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ o analogamente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Ora $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$, quindi applico rapporto $\rightarrow$ radice con

$a_n = \frac{n^n}{n!}$. Calcolo quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow e$ (vedi esempio 3)

quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Esempio 9

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{9^n - 7^n + n^{90} + \sin n!} = 9$$

Chi comanda si raccoglie !!!

$$\sqrt[n]{\dots} = \underbrace{\sqrt[n]{9^n}}_9 \left(\underbrace{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^n}_0 + \underbrace{\frac{n^{90}}{9^n}}_0 + \underbrace{\frac{\sin n!}{9^n}}_0 \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 9$$

$\sqrt[n]{b_n}$ con $b_n \rightarrow 1$, quindi $\rightarrow 1$

Esempio 10

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{4n}{n}} = \frac{256}{27}$$

$$\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)! n!}}$$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \frac{(4n)!}{(3n)! n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n+4)!}{(3n+3)! (n+1)!} \cdot \frac{(3n)! n!}{(4n)!}$$

$$(4n+4)! = (4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!$$

$$(3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)} \rightarrow \frac{4^4}{3^3} = \frac{256}{27}$$

$\uparrow$
polinomio
polinomio

$$\text{Quindi } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{256}{27}$$

(e ovviamente $a_n \rightarrow +\infty$
per il criterio della radice o del
rapporto : $\frac{256}{27} > 1$).

Esempio 11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + n^3 - n! = -\infty$

Cui comando si raccoglie!

$$\underbrace{n!}_{+\infty} \left(\underbrace{\frac{3^n}{n!}}_0 + \underbrace{\frac{n^3}{n!}}_0 - 1 \right) \rightarrow (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$$

fattoriale vs potenza o esponenziale

Teo. alg. prodotto Se $a_n \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow b_\infty \in \mathbb{R}$, allora
 $a_n \cdot b_n \rightarrow a_\infty \cdot b_\infty$

[Brutta: $|a_n \cdot b_n - a_\infty \cdot b_\infty| = |a_n b_n - a_n b_\infty + a_n b_\infty - a_\infty b_\infty|$

$$= |a_n (b_n - b_\infty) + b_\infty (a_n - a_\infty)|$$

$$\leq \underbrace{|a_n| \cdot |b_n - b_\infty|}_{\substack{\uparrow \\ a_n \leq M \text{ perché} \\ a_n \text{ è limitata} \\ \text{e definitivamente}}} + \underbrace{|b_\infty| \cdot |a_n - a_\infty|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Definitivamente}}}$$

$a_n \leq M$ perché
 a_n è limitata
e definitivamente

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b_\infty|}$$

e definitivamente

$$|b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{M}$$

Bella: Scelgo il definitiv. in modo che $|b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{M}$

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b_\infty|}$$

Domanda: ma non ci sono problemi se $b_\infty = 0$?
Come si aggiusta?