

CRITERI

RADICE

RAPPORTO

RAPPORTO $\rightarrow$ RADICECriterio della radice Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definita.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad (l \in [0, +\infty) \text{ opp. } l = +\infty)$$

Allora

- se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$, allora BOH (non si può dire nulla di a_n)

Criterio del rapporto Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definita.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (\text{come sopra})$$

Allora stesse conclusioni della radice.

Criterio rapporto $\rightarrow$ radice Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definita.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (\text{come sopra})$$

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (stesso l di sopra)Oss. Il rapporto $\rightarrow$ radice funziona anche per $l = 1$ e non riguarda il $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Esempi per l'ottimalità degli enunciati

① $a_n = n^2$ $a_n \rightarrow +\infty$

Il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \rightarrow 1$$

Quindi il criterio del rapporto in questo caso non aiuta
Analogamente $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \rightarrow 1$

② $a_n = \frac{1}{n^2}$ Ora $a_n \rightarrow 0$, ma i criteri non aiutano

③ Può succedere che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non ha limite.

$$a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$$

D'altra parte $1 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi

$$1 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

Oss. Il rapporto non può avere un limite diverso da quello della radice,

— 0 — 0 —

Dim. Caso $l > 1$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ $\frac{1}{2} \quad \frac{l+1}{2} \quad l$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Dall'ipotesi segue che

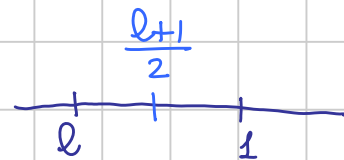
$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2} \quad \text{definitivo, quindi}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

↓ ↓
+∞ +∞ (espon. con base > 1)
(confronto)

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow +\infty$, positivo da $\sqrt[n]{a_n} \geq 2014$ definitivamente e procedo allo stesso modo.

Caso $l < 1$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$
 Tesi: $a_n \rightarrow 0$



Dall'ipotesi

$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente, quindi

$$\begin{array}{c} \text{Hp} \\ \boxed{0} \leq \textcircled{a_n} \leq \boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \text{ (base } < 1) \end{array}$$

Carabinieri

Oss. Il vero enunciato è il seguente: se $a_n \geq 0$

$\rightarrow \exists M > 1$ b.c. $\sqrt[n]{a_n} \geq M$ definitivamente $\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \exists M < 1$ b.c. $\sqrt[n]{a_n} \leq M$ " $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

— 0 — 0 —

Dim. rapporto

Caso 1 Ipotesi: $\exists M > 1$ b.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M$ definitivamente.
 Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Per ipotesi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$

$$[a_{n_0+1} \geq M a_{n_0}, a_{n_0+2} \geq M a_{n_0+1} \geq M^2 a_{n_0}, \\ a_{n_0+3} \geq M a_{n_0+2} \geq M^3 a_{n_0} \dots]$$

Per induzione dimostro che [fare!]

$$a_{n_0+k} \geq M^k a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè $a_n \geq M^{n-n_0} a_{n_0}$ definitivamente

cioè

$$a_n \geq M^n \frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}$$

$\downarrow +\infty$ $\downarrow +\infty$ $\downarrow$ costante positiva

Caso 2 Ipotesi: $\exists M < 1 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M \quad \forall n \geq n_0$

Tesi: $a_n \rightarrow 0$

Dall'ipotesi per induzione segue che

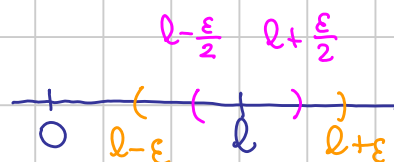
$$0 \leq a_n \leq M^n \frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow$ costante

Dim. rapporto $\rightarrow$ radice Ci sarebbe vari casi. Facciamo solo il caso $l \in (0, +\infty)$ (resterebbero $l=0$ e $l=+\infty$)

Ipotesi: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$ Tesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$

Per ipotesi $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$$

Ragionando come prima per induzione otteniamo che

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \frac{a_{n_1}}{\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_1}} \leq a_n \leq \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \frac{a_{n_1}}{\left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_1}}$$

Faccio la radice n -esima ovunque:

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\dots} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\frac{a_{n_1}}{\left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_1}}}$$

$\downarrow 1$ $\downarrow 1$ $\downarrow \sqrt[n]{\text{cost.}}$

Abbiamo dimostrato che

$$\text{RHS (right-hand side)} \rightarrow l + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{LHS} \rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2}$$

ma questo non basta per garantire il limite del CHS.

Tuttavia avendo che $\text{RHS} \leq l + \varepsilon$ definitivamente e
analogamente $\text{LHS} \geq l - \varepsilon$ definitivamente,
quindi in conclusione

$$l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

che è quello che volevo.

— o — o —

Qualche caso del te. algebrico

• Se $a_n \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow b_\infty \in \mathbb{R}$, allora $a_n + b_n \rightarrow a_\infty + b_\infty$

[Brutta: $|(a_n + b_n) - (a_\infty + b_\infty)| \leq \varepsilon$

$$|(a_n - a_\infty) + (b_n - b_\infty)| \leq |a_n - a_\infty| + |b_n - b_\infty| \leq \varepsilon]$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

Dim. vera Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$|(a_n + b_n) - (a_\infty + b_\infty)| \leq \varepsilon.$$

Per def. di lim. su a_n e b_n ho che

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ definitiv.} \quad |b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ definitiv.}$$

Quindi

$$|(a_n + b_n) - (a_\infty + b_\infty)| \leq |a_n - a_\infty| + |b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

definitiv.

$\uparrow$
 $|x+y| \leq |x| + |y|$

□