

RETTEA REALE ESTESA

Def. Si pone $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Quando si dice che $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, vuol dire che il limite può essere un $l \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$.

Posso definire in modo ovvio un ordinamento su $\bar{\mathbb{R}}$.

Posso quasi sempre definire le 4 operazioni su $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\forall + (+\infty) = +\infty$$

$$\forall \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$-\forall \cdot +\infty = -\infty$$

Alcune operazioni non si possono fare

$$+\infty + (-\infty)$$

$$+\infty \cdot 0$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

ma nemmeno

$$\frac{\neq}{0}$$

Teoremi algebrici sui limiti Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

$$a_n \rightarrow a_\infty \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow b_\infty \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\bullet a_n + b_n \rightarrow a_\infty + b_\infty$$

$$\bullet a_n \cdot b_n \rightarrow a_\infty \cdot b_\infty$$

$$\bullet \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a_\infty}{b_\infty}$$

$$\bullet \text{ se } \lambda \neq 0, \text{ allora } \lambda a_n \rightarrow \lambda a_\infty$$

TRANNE $\rightarrow$ il rapporto quando $b_\infty = 0$

$\rightarrow$ tutte le operazioni nelle 4 forme indetermina-
te

$$+\infty - \infty$$

$$\pm \infty \cdot 0$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

Achtung! Achtung! Cosa vuol dire forma indeterminata?
 non vuol dire che il limite non esiste, cioè è di tipo ④.
 Vuol dire che non posso dire niente del limite globale
 (della somma, prod., quoziente) sapendo solo il limite dei
 2 termini a_n e b_n .

Esempio classico

- | | |
|--|--------------------------------------|
| ① $a_n = 2n \rightarrow +\infty$
$b_n = -n \rightarrow -\infty$ | $a_n + b_n = n \rightarrow +\infty$ |
| ② $a_n = n \rightarrow +\infty$
$b_n = -2n \rightarrow -\infty$ | $a_n + b_n = -n \rightarrow -\infty$ |
| ③ $a_n = n + 15 \rightarrow +\infty$
$b_n = -n \rightarrow -\infty$ | $a_n + b_n = 15 \rightarrow 15$ |
| ④ $a_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty$
$b_n = -n \rightarrow -\infty$ | $a_n + b_n = (-1)^n$ e non ha limite |

Esercizio Fare esempi analoghi per le altre 3 forme indetermin.

Esempio 1 $a_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} - \underbrace{n}_{-\infty}$ FORMA INDETERMINATA
 $= \underbrace{n}_{+\infty} (\underbrace{n-1}_{+\infty}) \rightarrow +\infty$

Esempio 2 $a_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} - \underbrace{\sin(n^3)}_{BOH}$

$a_n \geq n^2 - 1$
 $\uparrow$
 $\sin x \leq 1$
 $\downarrow$
 $+\infty$ per confronto a 2 $\rightarrow +\infty$

Cosa posso dare per buono?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 0 \text{ (ovvero } 0^+) & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

SI DIM.
USANDO
LA
DEFINIZIONE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a \in (0, 1) \end{cases}$$

Oss. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$ ($1^n = 1, 1, 1, 1, 1, \dots$, quindi $\rightarrow 1$)

[Dim. $a^n = \underbrace{(1 + \underbrace{a-1}_x)}_{\substack{\uparrow \\ +\infty \\ \text{per confronto} \\ \text{a due}}}^n \geq \boxed{1 + (a-1)n}$ $\downarrow$ $+\infty$ se $a \geq 1$]

Se $a \in (0, 1)$, allora lo scrivo come $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$,
ma allora

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \boxed{\frac{1}{b^n}} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0 \quad]$$

Esempio 3 $\frac{n^2 + 3n + 5}{2n^2 - n} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\frac{\cancel{n^2} \left(1 + \boxed{\frac{3}{n}} + \boxed{\frac{5}{n^2}} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 - \boxed{\frac{1}{n}} \right)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$\downarrow$
0

Più in generale: il rapporto tra polinomi dello stesso grado tende
al rapporto tra i coeff. dei termini di grado
max

Esempio 4

$$\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$$

Ovviamente $-1 \leq \sin n \leq 1$

Divido per n conservando i versi (posso per $n > 0$)

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$
(Carabinieri)

Fatto generale Supponiamo che

- a_n sia limitata
- $b_n \rightarrow +\infty$

Allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

Dim. $A \leq a_n \leq B$ per ipotesi

Divido per b_n (e definitivamente posso perché $b_n > 0$ defn.)

$$\boxed{\frac{A}{b_n}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \boxed{\frac{B}{b_n}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$
(Carabinieri)

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(n!)}{\sqrt{n}} = 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(n!) \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per $\sqrt{n}$ e concludo con i carabinieri

Esempio 6 $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ uso $x = \frac{1}{n}$

$(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$ Faccio $\sqrt[n]{}$ (posso per monotonia di $\sqrt[n]{x}$)

$1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$ Quindi

$$\sqrt[n]{1} = 1 \leq \sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

(cambiare)

Analogamente se avessi $\sqrt[n]{a}$, faccio Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$ e ottengo

$$(1+\frac{a-1}{n})^n \geq 1+\frac{a-1}{n} \cdot n = a, \text{ quindi } \sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$$

Se so che $a \geq 1$ ho

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$$

Se invece $a \in (0,1)$, lo scrivo come $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e ottengo

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

In generale

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \forall a > 0$$

Tabellina

Esempio 7 $\sqrt[n]{n}$

Varianti di Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \forall x \geq 0$$

Esercizio per induzione

In particolare $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$

Uso $x = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Ottengo

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \geq n$$

Faccio la radice n -esima e ho

$$\begin{array}{ccccc} & \text{gratis} & & \text{sopra} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \textcircled{1} & \leq & \textcircled{\sqrt[n]{n}} & \leq & \textcircled{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Tabellina:

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$