

SUCCESIONI MONOTONE

Def. Una succ. a_n di numeri reali si dice

- debolmente crescente se $a_{m+1} \geq a_n$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
- strett. crescente " $a_{m+1} > a_n$ "
- debolmente decrescente " $a_{m+1} \leq a_n$ "
- strett. decrescente " $a_{m+1} < a_n$ "

Oss. 1 Strett. cresc. $\Rightarrow$ deb. crescente
 " decr. $\Rightarrow$ deb. decr.

Oss. 2 Una maniera analoga di dare le definizioni è di chiedere

$$\begin{array}{ll}
 a_m \geq a_n & \forall m > n \\
 a_m > a_n & \forall m > n \\
 a_m \leq a_n & \forall m > n \\
 a_m < a_n & \forall m > n \\
 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} &
 \end{array}$$

Importanza delle succ. monotone: i comportamenti possibili sono solo due

Teorema (delle succ. monotone)

Sia a_n una successione debolmente crescente (se è strett., meglio)

Allora ci sono solo due possibilità

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$

In entrambi i casi il limite (reale o $+\infty$) è

$$\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{sup dei valori assunti dalla successione})$$

Dim. Sia L il sup. Ci sono 2 casi

Caso 1 Se $L = +\infty$, allora dico che $a_n \rightarrow +\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$ arbitrario. Per def. di sup c'è un elemento della successione $\geq M$, cioè

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_{n_0} \geq M$$

Ma per la debole crescenza $a_n \geq a_{n_0} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$, quindi $a_n \geq M$ definitivamente.

(per def. di sup supera una volta, per monotonia non torna più indietro)

Caso 2 Se $L \in \mathbb{R}$, allora dico che $a_n \rightarrow L$.

Voglio dim.: $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

↑ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché

L è il sup (meglio $a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Per def. di sup (anzi per la caratterizzazione)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $L - \varepsilon \leq a_{n_0}$. Ma allora per monotonia

$L - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$, cioè definitivamente.



Osservazione Non è detto che $a_n \rightarrow L^-$ perché potrebbe valere sempre L . D'altra se assume almeno una volta il valore L , allora $a_n = L$ da lì in poi.

Oss. Se a_n è stretta. cresc., allora nel secondo caso $a_n \rightarrow L^+$.

Corollario Se a_n è debolm. cresc. e limitata superiormente, cioè $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per forza $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e $L \leq A$ [se fosse $L > A$ oppure $L = +\infty$, allora definitivamente dovrebbe superare A per i discorsi tipo permanenza del segno].

— o — o —

IL NUMERO e (NUMERO DI NEPERO)

Teorema La successione

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è debolmente crescente (anzi strettamente) e limitata superiormente (anzi $2 \leq e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$), quindi ha un limite reale,

Def. Si dice numero di Nepero e si indica con "e" il limite di e_n . Quindi

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (e = 2,718 \dots)$$

Dim.

Passo 1 (Non serve a niente) $e_n \geq 2$.

Parto dalla Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1$

Se metto $x = \frac{1}{n}$ ottengo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Passo 2 Dimostro la debole crescenza, cioè $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$.

$$e_n \geq e_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^n (n-1)^{n-1} \geq n^{2n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) (n^2-1)^{n-1} \geq n \cdot n^{2n-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n^2-1)^{n-1}}{(n^2)^{n-1}} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

Ora uso la Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$ che è > -1 appena $n \geq 2$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2} \stackrel{\text{spero}}{\geq} \frac{n}{n+1}$$

$$(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x$$

Vediamo la speranza: $\frac{n^2 - n + 1}{n^2} \stackrel{?}{\geq} \frac{n}{n+1}$

$$n^3 - \cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{n^2} - \cancel{n} + 1 \stackrel{?}{\geq} n^3 \quad \text{OK!}$$

Oss. Forse veniva ancora meglio se scrivessi

$$(n+1)^n (n-1)^{n-1} \geq n^{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(n^2-1)^n}{n-1} \geq n^{2n-1}$$

e andavo avanti da qua.

Passo 3 eu ≤ 3 Uso il binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2$$

$$\leq 1 + 2 = 3$$

Cosa abbiamo usato?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2$$

Questa è $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}$

↑
dim. per
induzione

↑
 $1 - a^n \leq 1$ poi
divido per $1 - a > 0$,
quindi conservo
il verso

Mettendo $a = \frac{1}{2}$ si ha quello che voglio.

Al passaggio precedente abbiamo usato che

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}$$

≤ 1 perché num.
≤ denom.

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$\boxed{\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}}$$

vera per ogni $k = 1, 2, \dots, n$

Dimostrazione più formale a posteriori

$$e^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

↑
Def.

↑
Binomio
Newton

↑
Disug.
di sopra

SHIFT
indici

$$\rightarrow = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

↑
succe.
geometrica

$$\leq 3$$