

Esempio 1 $n^2 \rightarrow +\infty$

[Dim.: devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n^2 \geq M \quad \forall n \geq n_0$,
cioè devo risolvere $n^2 \geq M$

- Se $M \leq 0$, posso scegliere $n_0 = 0$
- Se $M > 0$ devo avere $n \geq \sqrt{M}$, quindi basta che scelga un intero n_0 t.c. $n_0 \geq \sqrt{M}$.

Questo esiste perché abbiamo dim a suo tempo che $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Esempio 2 $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
 $\uparrow$
 banale

Devo risolvere $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \dots$ percorso $\dots \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

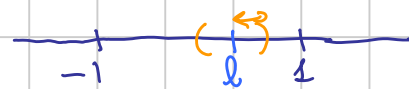
Quindi basta scegliere $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Esempio 3 $(-1)^n$ NON ha limite.

Di certo non tende a $+\infty$ (per farlo dovrebbe superare 2014)

" " " " " $-\infty$ (" " " " " -25)

Non tende a numeri $l \neq \pm 1$ perché definitivamente dovrebbe stare in un intervallo che evita ± 1



Non tende a 1 perché definitivamente dovrebbe stare tra 0 e 2 ($\varepsilon = 1$),
ma frequentemente non ci sta

Non tende a -1 per lo stesso motivo.

— o — o —

Teorema (Permanenza del segno) Supponiamo che $a_n \rightarrow +\infty$ oppure $a_n \rightarrow l > 0$. Allora $a_n > 0$ definitivamente.

Dim.: Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora uso la def. con $M = 14$.
Definitiv. $a_n \geq M = 14 > 0$, quindi $a_n > 0$.

Se invece $a_n \rightarrow l > 0$, allora uso la def. con $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Definitivamente



$$a_n \geq l - \varepsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0$$

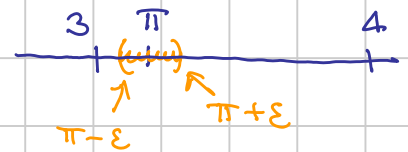
— 0 — 0 —

Esercizio Enunciare e dim. con segno negativo

— 0 — 0 —

Variaute Se $a_n \rightarrow \pi$, allora $3 < a_n < 4$ definitivamente

Scego $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che



$3 < \pi - \varepsilon < \pi + \varepsilon < 4$. Allora definitiv.

$\pi - \varepsilon \leq a_n \leq \pi + \varepsilon$ e quindi $3 < a_n < 4$.

Ad esempio va bene $\varepsilon = \frac{\pi - 3}{2}$.

— 0 — 0 —

Teorema (Unicità del limite) Una successione ha uno ed uno solo dei comportamenti [1], [2], [3], [4]. Inoltre, se è di tipo [1], allora esiste un unico $l \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \rightarrow l$.

Dim. Ci sarebbero tanti casi da fare. Facciamone uno: escludiamo che possa essere $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $a_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$.
Supponiamo per assurdo che accada.
wlog (WITHOUT LOSS OF GENERALITY) $l_1 < l_2$.

Scego $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{3}$ in modo che



$l_2 - \varepsilon > l_1 + \varepsilon$ (verificare che accade).

Allora per def. di limite si dovrebbe avere che

$l_1 - \varepsilon \leq a_n \leq l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente
ma allora si avrebbe $a_n < a_n$, il che è assurdo. $\square$

Teorema (confronto a 2) Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente.

Allora

- se $a_n \rightarrow +\infty$, anche $b_n \rightarrow +\infty$
- se $b_n \rightarrow -\infty$, anche $a_n \rightarrow -\infty$

[Dim. della 1ª: $\forall M$ $a_n \geq M$ definitiv., ma allora pure $b_n \geq M$...]

Achtung! Ogni altra deduzione è ABUSIVA.

Teorema (confronto a 3) (Carabinieri) Supponiamo che

$a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ } stesso l REALE

Allora anche $b_n \rightarrow l$ (stesso l).

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Per def. di lim. su c_n so che

$$c_n \leq l + \varepsilon \quad \forall n \geq n_{0,c}$$

Per def. di lim. su a_n so che

$$l - \varepsilon \leq a_n \quad \forall n \geq n_{0,a}$$

Ma allora definitivamente ($\forall n \geq \max \{n_{0,c}, n_{0,a}, n_0 \text{ dell'ipotesi}\}$)

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon$$

quindi in particolare $l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon$ che è quello che volevo. $\square$



Oss. Se $a_n = b_n$ definitivamente, allora a_n e b_n hanno (ovviamente) lo stesso comportamento.

Esempio 1 Se $a_n \rightarrow +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora
 $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

Dim. b_n lim. inf. vuol dire che $\exists B \in \mathbb{R}$ t.c. $b_n \geq B$.
Ma allora

$$a_n + b_n \geq a_n + B$$

Fisso $M \in \mathbb{R}$. Poiché $a_n \rightarrow +\infty$ avremo che $a_n \geq M - B$ definitiv., ma allora

$$a_n + b_n \geq a_n + B \geq M - B + B = M \quad \text{definitiv.}$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

[Poiché dire $2^n \geq M$ se e solo se $n \geq \log_2 M$ e questo è vero definitivamente.

Preghiera: per definire $\log_2 x$ serve sapere che 2^x assume valori grandi a piacere, quindi in un certo senso bisogna il limite
PRIMA

Altra via più elementare. Per induzione dimostro che

$$\begin{array}{ccc} (2^n) \geq 1 + n \geq (n) & & \forall n \in \mathbb{N} \\ \downarrow \text{~~~~~} & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty \end{array}$$

per confronto a 2.

— o — o —