

Def. Sia $P(n)$ un predicato che riguarda $n \in \mathbb{N}$. Si dice che

- $P(n)$ vale DEFINITIVAMENTE

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad P(n) \text{ è vero } \forall n \geq n_0$$

- $P(n)$ vale FREQUENTEMENTE se vale per infiniti indici n , o equivalentemente

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n \text{ t.c. } P(m) \text{ è vero}$$

Def. Una successione di numeri reali è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Notazione Di solito una succ. si indica con x_n, a_n, y_n
invece di $f(n), a(n)$

Def. elastica di successione Si accettano come succ. anche quelle "funzioni" che non sono def. per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma solo definitivamente, cioè sempre tranne un numero finito di casi.

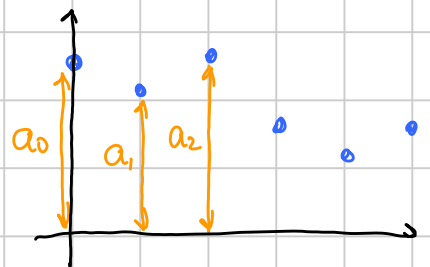
Esempi : $a_n = \frac{1}{n-3}$
Ok per $n \geq 4$

$b_n = \sqrt{n-2014}$
Ok per $n \geq 2014$

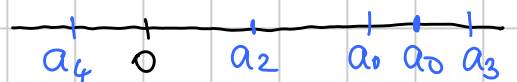
$c_n = \sqrt{2014^{2014} - n}$
NON è una successione perché va male frequentemente

Come visualizzare una succ. Sia a_n una succ.

- ① Nel piano cartesiano considero i p.ti di coord. (n, a_n)
Sostanzialmente è il grafico.



- ② Disegno su una retta i p.ti di ascissa a_n



③ Penso alla retta e penso allo scorrere del tempo e al secondo n si accende una lampadina in a_n e sta accesa un secondo
 — o — o —

limite di una succ. = comportamento della succ. per n grandi

I possibili tipi di comportamento sono 4.

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ $a_n \rightarrow l$
 " a_n tende ad l "

"il limite per n che va all'infinito di a_n è l "

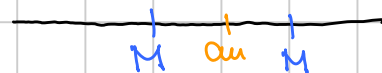
② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ $a_n \rightarrow +\infty$

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ $a_n \rightarrow -\infty$

④ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ NON ESISTE a_n È INDETERMINATA
 a_n NON HA LIMITE

Def. di ④ Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grandi)



si ha che $a_n \geq M$ definitivamente
 (più M è grande, più il definitivamente inizia dopo)

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M$$

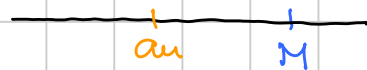
↑ dipende da M

Stessa cosa detta in maniera barocca: $a_n \rightarrow +\infty$ se $\exists g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$
 tale che

$$a_n \geq M \quad \forall n \geq g(M)$$

↑ sarebbe l' n_0 corrispond. ad M .

Def. di [3] Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se



$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M$$

$a_n \leq M$ definitivamente

$\uparrow$
molto
negativi

Def. di [1] Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

$\nwarrow \nearrow$
anche strette
sarebbe lo stesso



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon}_{|a_n - l| \leq \varepsilon \text{ (precorso)}}$$

distanza di a_n da l

Due varianti di [1] $a_n \rightarrow l^+$

... da dx

$a_n \rightarrow l^-$

... da sx

[1+] Si dice che $a_n \rightarrow l^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ $l < a_n \leq l + \varepsilon$ def. STRETTO

[1-] Si dice che $a_n \rightarrow l^-$ se $\forall \varepsilon > 0$ $l - \varepsilon \leq a_n < l$ def. STRETTO

Oss. Se $a_n \rightarrow l^+$ oppure $a_n \rightarrow l^-$, allora $a_n \neq l$ definitivamente.

Esempi intuitivi

① $n^2 \rightarrow +\infty$

② $527 - n^3 \rightarrow -\infty$

③ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ anzi $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$

④ $(-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$
non ha limite

⑤ $(-1)^n n = 0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$
non ha limite.

Leggende metropolitane

① Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente

FALSO: 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, ... "Penelope"

② Se $a_n \rightarrow l$, allora $a_n \rightarrow l^+$ oppure $a_n \rightarrow l^-$

FALSO: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ $\frac{(-1)^n}{n}$

③ Se $a_n \rightarrow 0^+$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

FALSO: $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ $\frac{1}{\text{Penelope}}$
— 0 — 0 —

Teorema Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora a_n è limitata, cioè esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che $A \leq a_n \leq B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dim.: Idea: definitiv. sta tra $l-\epsilon$ e $l+\epsilon$, i termini precedenti sono un numero finito.

Uso la def. di limite con $\epsilon = 37$. Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$l - 37 \leq a_n \leq l + 37 \quad \forall n \geq n_0$$

Ora basta porre

$$B = \max \{ \overbrace{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}}^{\text{numero finito}}, l + 37 \}$$
$$A = \min \{ a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, l - 37 \}.$$

Con questi valori si ha la tesi. $\square$

LM ④ Se una successione è limitata, allora ha limite reale.

FALSO: $(-1)^n$,