

PRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

POTENZE $f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Il comp. dipende dalla parità dell'esponente.

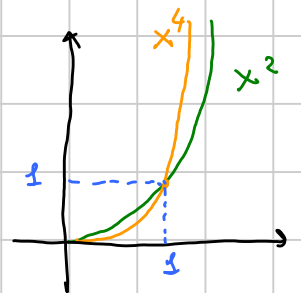
Teorema (poco misterioso) Per n pari la funzione $f(x) = x^n$, vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva.

Di conseguenza, f è invertibile e l'inversa

$$g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

ed è detta radice n -esima

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$



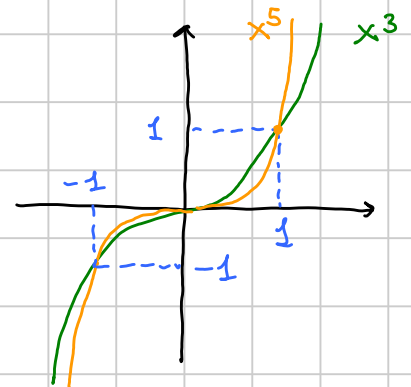
Oss. INPUT: reali ≥ 0 OUTPUT: reali ≥ 0
quindi $\sqrt[4]{16} = 2$ (e non ± 2 o simili)

Teorema (poco misterioso) Per n dispari la funzione $f(x) = x^n$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è strett. cresc., iniettiva, surgettiva, dispari.

Di conseguenza è invertibile e l'inversa

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la radice n -esima

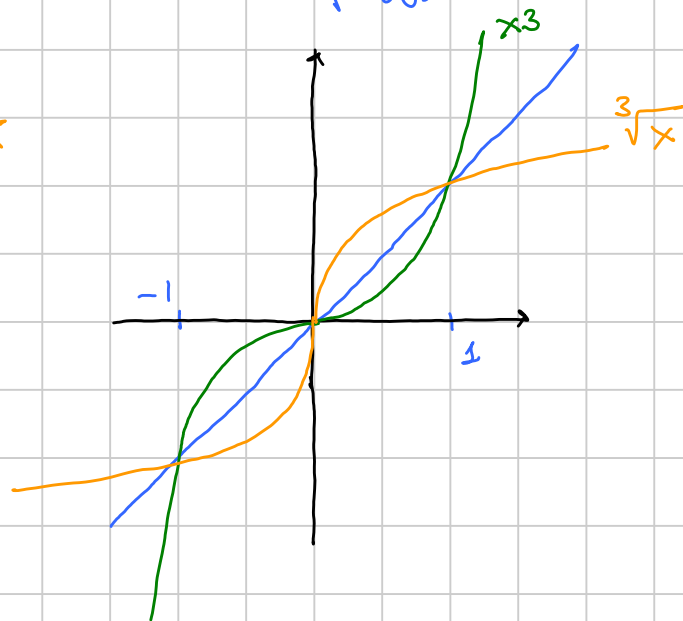
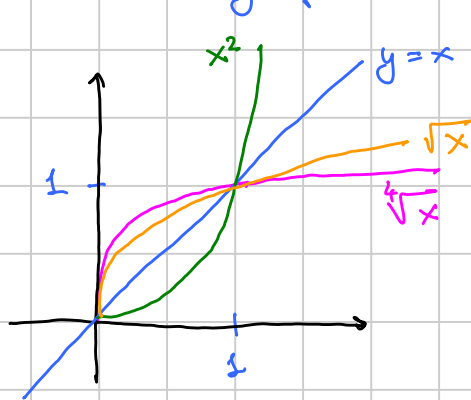
$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$



Oss. INPUT: x reale qualunque, OUTPUT: reali qualunque, dello stesso segno di x

FATTO GENERALE

Per funzioni reali, il grafico dell'inversa è il simmetrico del grafico della funzione wrt a $y=x$, cioè se $(x,y) \in G_f$, allora $(y,x) \in G_{f^{-1}}$



Oss. sul mistero dei koreani

① La def. di x^n segue per induzione dagli assiomi di $\mathbb{R}$
$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

② La stretta crescita di x^n per $x \geq 0$ si dimostra volendo per induzione. Al passo induttivo, preso $y > x$ ho $y^n > x^n$ per ipotesi induttiva, quindi voglio dedurre $y^{n+1} > x^{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} y^{n+1} & = & y \cdot y^n & > & y \cdot x^n & \geq & x \cdot x^n = x^{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Def.} & & \text{Hp} \cdot y & & y > x \text{ uol. per } x^n & & \text{Def.} \end{array}$$

③ L'injectività segue dalla stretta crescita.

④ La surgettività è un PROBLEMA. Vuol dire mostrare che l'equazione $x^n = \lambda$ ha soluzione per ogni $\lambda \geq 0$ e ogni $n \geq 1$.

[Idea: bisogna usare l'assioma di continuità. Definisco

$$A = \{x \geq 0 : x^n < \lambda\} \quad B = \{x \geq 0 : x^n > \lambda\}$$

Dimostro che $A \neq \emptyset$, dimostro che $B \neq \emptyset$, dimostro che A è a sx di B , dimostro che un qualunque $\text{sep } c$ verifica $c^n = \lambda$]
 $\uparrow$ delicato

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

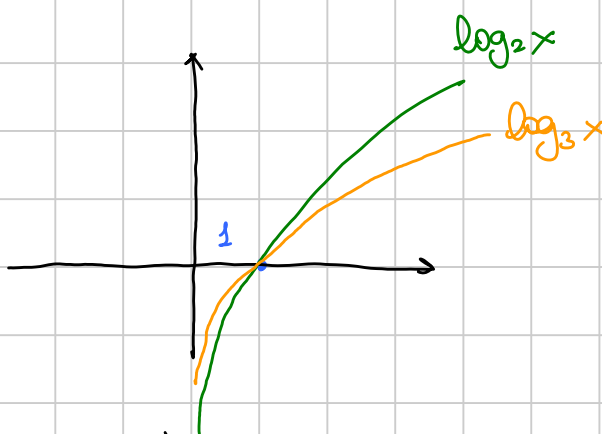
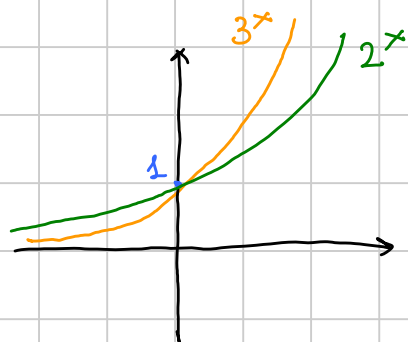


ESPONENZIALI $f(x) = a^x$ con a parametro

Oss. Potenze: x alla base Esponenziali: x all'esponente

Fatti. Per ogni $a > 1$ la funzione $f(x) = a^x$ vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva, surgettiva.
L'inversa $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta $\log$ in base a di x

$g(x) = \log_a x$
è pure strett. cresc.



Per ogni $a \in (0, 1)$ la situazione è analoga scambiando crescente con decrescente.



Proprietà precorsistiche:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$

Teorema misterioso (definizione di esponenziale)

Per ogni $a > 0$ esiste un'unica funzione $f_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ che verifica le seguenti proprietà:

(i) $f_a(1) = a$

(ii) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$

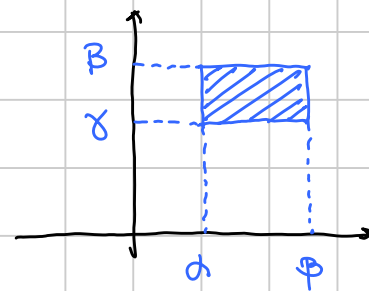
] basterebbero a definire univocamente $f_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

(iii) esiste un rettangolo in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ che non contiene punti del grafico, cioè esistono $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ e $[\gamma, \delta] \subseteq (0, +\infty)$ tale che il grafico di f_a non incontra $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$

Secondo teorema misterioso L'unica

funzione che verifica (i) - (ii) - (iii) è

- nel caso $a = 1$ è la costante 1
- nei casi $a > 1$ e $a \in (0, 1)$ ha le proprietà di monotonia, injectiva e surgettività enunciate precedentemente. Il problema grosso è sempre la surgettività!



Oss. L'esistenza di una funzione che verifica (i) - (ii) - (iii) si può fare a tappe

① Si definisce per $x \in \mathbb{N}$

② " " " $x \in \mathbb{Z}$

③ " " " $x \in \mathbb{Q}$

④ Si estende a ogni $x \in \mathbb{R}$ ponendo per $a > 1$

$$f_a(x) = \sup \{ f_a(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < x \}$$

e questa è già la parte dura.