

- ① Preliminari
- ② Limiti e questioni collegate
- ③ Calcolo differenziale (derivate, studi di funzione)
- ④ Calcolo integrale

4 inizi diversi

- insiemi e funzioni
- induzione
- numeri reali
- funzioni elementari

Logica elementare

Proposizione = frase che può essere vera / falsa

Esempi : 1 - Il numero di molecole in questa stanza è pari
 2 - $2014 \geq 2000$ Vero

Predicato : frase con dei parametri che a seconda del valore dei parametri può essere V/F

Esempi

$x^2 \geq 2014$
 $\uparrow$
parametro

$a > b$
 $\uparrow \quad \uparrow$
parametri

Quantificatori :

$\forall$
 $\exists$
 $\exists!$

per ogni

esiste almeno un

esiste un unico

Quando quantifico tutti i parametri un predicato diventa una proposizione

Esempi

$\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$
prop. falsa

$\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$
prop. vera

$\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad a < b$ Falsa

$\exists a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$ Vera

$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$ Vera

B = insieme di ragazzi (boys)

G = " " ragazze (girls)

$P(b, g)$ = al boy b piace la girl g

$\forall b \in B \quad \forall g \in G \quad P(b, g)$

a tutti piacciono tutte

$\exists b \in B \quad \exists g \in G \quad P(b, g)$

c'è almeno 1 a cui piace almeno una

$\forall b \in B \quad \exists g \in G \quad P(b, g)$

A tutti i B piace almeno una G

$\exists b \in B \quad \forall g \in G \quad P(b, g)$

C'è un B a cui piacciono tutte

$\forall g \in G \quad \exists b \in B \quad P(b, g)$

Ogni G piace ad almeno un B

$\exists g \in G \quad \forall b \in B \quad P(b, g)$

Esiste una G che piace a tutti

Operazioni tra proposizioni

AND

$3 > 2$ AND $3 < 27$
prop prop

AND

E

$\wedge$

Nuova Prop (vera se sono vere tutte e 2)

VEL

$3 > 2$ VEL $3 > 7$
 $3 > 2$ VEL $3 > 0$

VEV

O

$\vee$

Entrambe le prop. globali sono vere

Il VEL è falso se e solo se sono false tutte e 2.

NEGAZIONE Proposizione che dice l'esatto contrario

P : oggi è giovedì

$\text{NOT } P$: oggi non è giovedì

Come si negano AND e VEL?

$$\text{NOT } (P \wedge Q) = (\text{NOT } P) \vee (\text{NOT } Q)$$

Se non è vero che P e Q sono vere, vuol dire che almeno una delle 2 è falsa

$$\text{NOT } (P \vee Q) = (\text{NOT } P) \wedge (\text{NOT } Q)$$

Se non è vero che o P o Q è vera, allora vuol dire che sono false tutte e 2.

Come si nega una prop. ottenuta quantificando un predicato?

Prop: $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$

Neg. $\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 < 2014$

$$\text{NOT } (\forall x \in \dots P(x))$$

$$\exists x \in \dots \text{NOT } P(x)$$

P : tutti i cavalli sono bianchi

$\forall c \in \text{cavalli} \quad c \text{ è bianco}$

$\text{NOT } P$: esiste un cavallo che non è bianco

$\exists c \in \text{cavalli} \quad c \text{ è non bianco}$

$$\exists x \in \mathbb{N} \quad x^3 \geq 7$$

$$\text{Neg. } \forall x \in \mathbb{N} \quad x^3 < 7$$

$$\text{NOT } (\exists x \in \dots P(x))$$

$$\forall x \in \dots \text{NOT } P(x)$$

Esercizio

Negare

$$\exists b \in B \quad \forall g \in G \quad P(b, g)$$

$$\forall b \in B \quad \exists g \in G \quad \text{NOT } P(b, g)$$

Esercizio Ogni anno c'è almeno uno studente che passa tutti gli esami

Traduzione: $\forall a \text{ anno } \exists s \text{ studente } \forall e \text{ esame}$
 $\text{Passa}(a, s, e)$

Negazione: $\exists a \text{ anno } \forall s \text{ studente } \exists e \text{ esame}$
 $\text{NOT Passa}(a, s, e)$

In almeno un anno tutti gli studenti hanno superato almeno un esame

Altro esempio $\exists a \text{ anno } \forall s \text{ studente } \forall e \text{ esame}$
 $\text{Passa}(a, s, e)$

Negazione: $\forall a \text{ anno } \exists s \text{ studente } \exists e \text{ esame}$
 $\text{NOT Passa}(a, s, e)$

In ogni anno c'è almeno uno studente che supera almeno un esame.

Esercizio Quantificare in tutti i modi possibili
 $\text{Passa}(a, e, s)$
e negare.