

Funzioni elementariPotenze con esponente naturale pari

$$f(x) = x^{2k}$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

sono iniettive, surgettive, continue

→ iniettività: facile via strada monotonia, da quale segue segue dagli assiomi di ordinamento

→ continuità: facile a partire da

- la funzione $f(x) = x$ è continua (def. $\varepsilon - \delta$)
- il prodotto di funzioni continue è continuo
- induzione su k

→ surgettività: segue da

- fatto che $f(0) = 0$ e $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$
(prodotto di limiti o confronto $f(x) \geq x$ per $x \geq 1$)
- teorema di esistenza degli zeri che usa solo continuità della $f(x)$ e assioma di continuità via esistenza di sup/inf.

Potenze con esponenti dispari x^{2k+1} : discorso analogo solo con
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

A questo p.to abbiamo che le funzioni inverse sono ben definite e continue (via continuità dell'inversa di una $f(x)$ con insieme di def. convesso).

Funzione esponenziale Come è definita?

Soluzioni di comodo:

① $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ (converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ per assoluta convergenza + criterio radice)

② $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

③ È la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Soluzione da inizio corso: via equazione funzionale

Per ogni $a > 1$ (si potrà fare anche per $a=1$ e $0 < a < 1$)
cerco una funzione

$$f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow \text{sarà } (0, +\infty)$$

tale che

$$(i) f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(ii) f_a(1) = a$$

Sorpresona: non esiste un'unica funzione con queste 2 proprietà, ma quasi

Teorema Per ogni $a > 1$ esiste unica $f_a: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ con le proprietà di sopra (intese $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}$). Inoltre tale funzione è

- continua in $\mathbb{Q}$
- monotona crescente in $\mathbb{Q}$.

Dim. Passo 1 Definisco $f_a(x)$ per $x \in \mathbb{N}$

$$f_a(1) = a$$

$$f_a(2) = f_a(1+1) \stackrel{(i)}{=} f_a(1) \cdot f_a(1) = a^2$$

$$f_a(3) = f_a(2+1) = f_a(2) \cdot f_a(1) = a^2 \cdot a = a^3$$

per induzione $f_a(m+1) = f_a(m) \cdot a = a^m \cdot a$

$$f_a(0) = f_a(0+0) \stackrel{(i)}{=} f_a(0) \cdot f_a(0)$$

quindi $f_a(0)$ può essere solo 0 oppure 1 (risolve $x^2=x$)

Se fosse $f_a(0)=0$ avrei però

$$a = f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1) \cdot \underset{0}{f_a(0)} = 0 \leadsto \text{assurdo}$$

Quindi $f_a(0)=1$.

Oss. bisognerebbe qui dimostrare che così definita risolve la (i) per ogni x e y in $\mathbb{N}$.

Passo 2 Definisco $f_a(x)$ per $x \in \mathbb{Z}$.

Se $x = -n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$

$$1 = f_a(0) = f_a(n+(-n)) \stackrel{(i)}{=} \underset{a^n}{f_a(n)} \cdot f_a(-n)$$

da cui

$$f_a(-n) = \frac{1}{f_a(n)} = \frac{1}{a^n}$$

Oss. Bisognerebbe fare come sopra

Passo 3 Passo a $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$a^m = f_a(m) = f_a\left(\underbrace{\frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}}_{n \text{ volte}}\right) = f_a\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \dots \cdot f_a\left(\frac{m}{n}\right)$$

↑
estensione di (i) ad n addendi
che si dim. per induzione

$$= \left[f_a\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n$$

Quindi $f_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$

Oss. la solita.

Passo 4 Monotonia in $\mathbb{Q}$. Devo dim. che

$$f_a(x+y) > f_a(x)$$

" ← (i)

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \text{ con } y > 0$$

$$f_a(x) \cdot f_a(y)$$

Posso dividere e ottengo che è vera $\Leftrightarrow f_a(y) > 1$ per ogni $y > 0$

Questo segue ponendo $y = \frac{m}{n}$ e osservando che

$$f_a(y) = \sqrt[n]{a^m} > 1 \quad \text{se } m \text{ ed } n \text{ sono positivi per le propr. delle radici.}$$

Passo 5 Continuità su $\mathbb{Q}$. Fisso $x_0 \in \mathbb{Q}$ e prendo $R \in \mathbb{Q}$

$$|f_a(x_0+R) - f_a(x_0)| = |f_a(x_0) \cdot f_a(R) - f_a(x_0)|$$

$$= |f_a(x_0)| \cdot \underbrace{|f_a(R) - 1|}$$

voglio che sia piccolo
quando R è piccolo

Devo dimostrare che $f_a(R) \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow 0$.

Osservo che per la monotonia mi basta dire che $f_a(\frac{1}{n}) \rightarrow 1$.
 Il fatto che $f_a(\frac{1}{n}) \rightarrow 1$ è equiv. a dire che

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

(e questo si fa con solo BERNOLLI)

— o — o —

A questo punto si può estendere in modo unico la funzione esponenziale a tutto $\mathbb{R}$ in modo che rimanga monotona

$$f_a(x) = \sup \{ f_a(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < x \}$$

Lo stesso ragionamento di sopra mostra che continua a verificare la (i) ed è monotona e continua.

A quel p.to è sufficiente per dimostrare che tende a $+\infty$ e 0 dalle due parti. Questo si fa con Bernoulli.

— o — o —

Definizione di $\sin x$ e $\cos x$

Comodi: ① somma delle serie di potenze

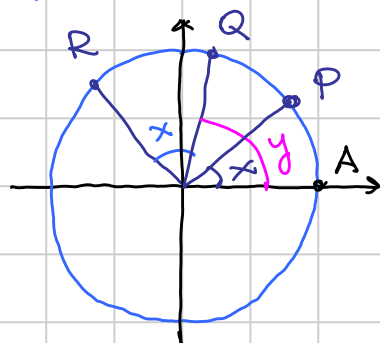
② soluzioni di $u'' = -u$ con opportuni dati iniziali

Precorso o quasi: equazione funzionale, imponendo

$$S^2(x) + C^2(x) = 1 \quad \leftarrow \text{stare sulla circonf.}$$

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \\ C(x+y) &= \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{quello che ci si} \\ \text{aspetta} \end{array} \right.$$

$$\text{dist}(A, P) = \text{dist}(Q, R)$$



Fissato un periodo a , esiste un'unica soluzione non nulla che è a periodica, in 0 vale $(1, 0)$ e in $\frac{a}{4}$ vale $(0, 1)$

— o — o —