

CONFRONTO TRA DEFINIZIONI DI INTEGRALE

Ingrediente: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con due proprietà

(i) limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) nulla fuori di un intervallo, cioè $\exists [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ b.c.
 $f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b]$

Voglio definire $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$

Definizioni

① Una partizione P è un insieme di p.ti

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad (\text{ } n \text{ può dipendere da } P)$$

② Una partizione P ingloba $[a, b]$ se

$$x_0 \leq a \quad \text{e} \quad x_n \geq b$$

③ Una funzione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice step function se esiste una partizione P ed esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$\varphi(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

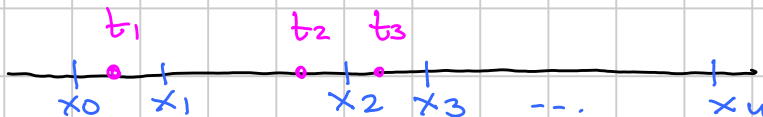
$$\varphi(x) = 0 \quad \forall x < x_0 \quad \text{e} \quad \forall x > x_n$$

(non sto prescrivendo cosa vale nei p.ti x_i)

④ Indichiamo con SF l'insieme delle step function

⑤ Una partizione taggata (tagged partition) è una coppia (P, T) dove P è una partizione e $T = (t_1, \dots, t_n)$ sono p.ti tali che

$$t_i \in (x_{i-1}, x_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$



⑥ Si definisce diametro di una partizione il numero reale positivo

$$\text{diam}(P) := \max \{ |x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots, n \}$$

⑦ Si definisce

$$SF_f^+ := \{ \varphi \in SF : \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$$

$$SF_f^- := \{ \varphi \in SF : \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$$

Def. (Integrale "auandico") Data f come sopra, si pone

$$I^+(f) := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi \in SF_f^+ \right\}$$

$$I^-(f) := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi \in SF_f^- \right\}$$

Ovviamente $\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \quad \forall \varphi \in SF$

Si dice che f è integrabile se $I^+(f) = I^-(f)$ (in generale vale solo $I^-(f) \leq I^+(f)$).

Criterio Una funzione f è integrabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in SF_f^+ \quad \exists \psi_\varepsilon \in SF_f^- \quad \text{b.c.}$$

$$\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x)) dx \leq \varepsilon$$

Posso considerare φ_ε e ψ_ε come provenienti da una stessa partizione.

— o — o —

Def. (Integrale di DARBOUX) Sia f come sempre.
Per ogni partizione P che ingloba $[a, b]$ definiamo

$$M_i := \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$m_i := \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Poi pongo

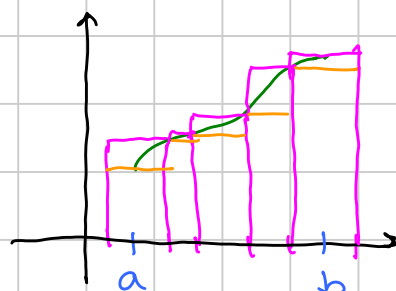
$$I_D^+(f, P) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i$$

$$I_D^-(f, P) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i$$

Ora definisco

$$I_D^+(f) := \inf \{ I_D^+(f, P) : P \text{ ingloba } [a, b] \}$$

$$I_D^-(f) := \sup \{ I_D^-(f, P) : P \text{ ingloba } [a, b] \}$$



Come prima si ha sempre $I_D^-(f) \leq I_D^+(f)$. Se vale il segno di uguale, allora si dice che f è integrabile alla Darboux.

Criterio Una funzione f è int. alla Darboux se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \text{ che ingloba } [a, b] \text{ t.c. } I_D^+(f, P_\varepsilon) - I_D^-(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Teorema (esercizio)

Per ogni funzione f ammissibile l'integrale superiore e inferiore "classici" coincidono con quelli alla Darboux.

Def. (alla Riemann) Sia f come sempre.

Per ogni partizione taggata P, T con P che ingloba $[a, b]$ definisco

$$S(f, P, T) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underbrace{f(t_i)}_{\substack{\uparrow \text{valore intermedio} \\ \text{tra } m_i \text{ e } M_i}}$$

$\uparrow$ somma di Riemann relativa a P, T .

Si dice che f è integrabile alla Riemann, ed il suo integrale vale I , se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (P, T)$ part. taggata che ingloba $[a, b]$

$$\text{diam}(P) \leq \delta \Rightarrow |I - S(f, P, T)| \leq \varepsilon$$

Oss. La definizione produce un integrale senza passare dall'integrale inferiore e superiore e soprattutto senza usare le parole $\inf$ e $\sup$.

Teorema Una funzione f ammissibile è integrabile alla Riemann se e solo se è integrabile alla Darboux, e questo vale a sua volta se e solo se è integrabile in senso "auddico".

Caso speciale Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana con costante L .
Estendiamo f a tutto $\mathbb{R}$ ponendo 0 fuori da $[a, b]$.
Come posso stimare

$$\int_a^b f(x) dx - S(f, P, T)$$

$\uparrow$ partizione con $x_0 = a$ e $x_n = b$

Detto altrimenti: se approssimo $\int_a^b f(x) dx$ con una somma di Riemann, che errore commetto?

Sol.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (\text{uso thm. media int.}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(s_i) \\ &\quad \uparrow \text{misterioso nell'interv.}\end{aligned}$$

D'altra parte

$$S(f, P, T) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \quad \uparrow \text{tag dati}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x) dx - S(f, P, T) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (f(s_i) - f(t_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) |f(s_i) - f(t_i)| \\ &\stackrel{\text{Lip}}{\leq} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) L |s_i - t_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) L \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{\leq \text{diam}(P)} \\ &\leq L \text{diam}(P) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= L \text{diam}(P) \cdot (b-a)\end{aligned}$$

Risposta: L'errore commesso è proporzionale al diametro della partizione, quindi tende a 0 quando $\text{diam} \rightarrow 0$.

Varianti: se f è α -Hölder troverei

$$\text{errore} \leq M(b-a) \underbrace{[\text{diam}(P)]^\alpha}_{\substack{\uparrow \text{in generale qui c'è} \\ \text{modulo di} \\ \text{continuità}} \rightarrow \omega(\text{diam}(P))}$$