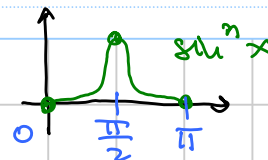


Esercizio

$$I_n := \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$$



Abbiamo dim. che $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, quindi $I_n \rightarrow I_\infty$. Chi è I_∞ ?

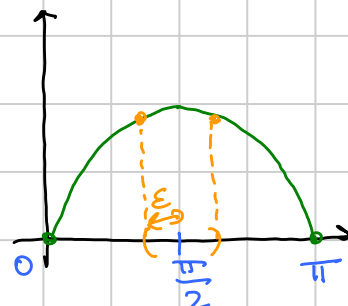
Brutalmente $I_n \rightarrow 0$, ma come lo dimostro?

1ª possibilità: se sono pari e dispari, uso la ricorrenza e mostro che la produttoria tende a 0

2ª possibilità: fisso $\varepsilon > 0$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \, dx + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \dots}_{\leq 2\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \dots$$

↑
ampiezza interv.
per max funzione



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \, dx \leq \underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\text{ampiezza intervallo}} \cdot \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n}_{\text{max funzione}}$$

Quindi

$$I_n \leq 2\varepsilon + \pi \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n}_{\downarrow 0}$$

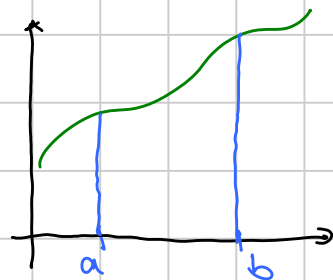
Facciamo limsup a dx e sx ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq 2\varepsilon$$

Essendo ε arbitrario deduco $\limsup_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Domanda: ordine di infinitesimo e parte principale di I_n
↑ (difficoltà ignota)

Esercizio 2 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2



|Integrale - area trapezio| =

$$= \left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \leq (b-a)^3 \cdot \max \{ |f''(x)| : x \in [a, b] \}$$

Integrale - area trapezio = $\int_a^b \boxed{f(x) - \underbrace{\varphi(x)}_{\text{retta}}} dx$
errore

$$|\text{Errore}| = \left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx$$

Devo stimare $|\varphi(x)|$.

1ª stima $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \overset{0}{\varphi(a)}| = |x-a| \cdot \overset{\uparrow \text{Lagrange}}{|\varphi'(c)|}$
 $\leq |b-a| \cdot |\varphi'(c)|$

Osservazione: per ROLLE esiste un pto $d \in (a, b)$ t.c.
 $\varphi'(d) = 0$. Ma allora

2ª stima: $|\varphi'(c)| = |\varphi'(c) - \overset{0}{\varphi'(d)}| = |c-d| \cdot \overset{\uparrow \text{Lagrange su } \varphi'}{|\varphi''(e)|}$
 $= |c-d| \cdot |f''(e)|$
 $\leq |b-a| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

Mettendo insieme le 2 stime: $|\varphi(x)| \leq |b-a|^2 \cdot \max |f''(x)|$
Integrando in $[a, b]$ ho la tesi.
— o — o —

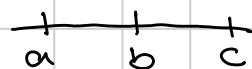
INTEGRALE DARBOUX VS INTEGRALE DI RIEMANN

Oss 1 Conviene definire l'integrale su tutto $\mathbb{R}$, limitandosi a funzioni che sono nulle fuori da un intervallo e limitate globalmente

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Con questa notazione, il fatto che

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



è un caso particolare dell'integrale della somma.

Def. auarchica (quella data)

$$\text{Int. superiore} = \sup_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx : \begin{array}{l} \varphi \text{ a scalini e} \\ \varphi(x) \geq f(x) \text{ in } \mathbb{R} \end{array}$$

Def. alla DARBOUX. Faccio così le funzioni a scalini:

→ prendo una suddivisione $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e pongo

$$\varphi(x) := \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \} \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

↑
in ogni intervallo
 $\varphi(x)$ è il sup di f

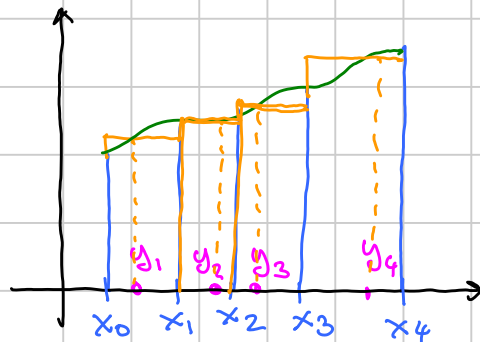
→ definisco l'integrale superiore come il sup di $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)$,
dove $\varphi(x)$ è fatta come sopra

Viene la stessa nozione

Definizione di RIEMANN

Suddivido con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ come prima.
In ogni intervallo prendo un pto a caso $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$
e costruisco la funzione a gradino che vale $f(y_i)$
in quell'intervallo.

Def. (Riemann) Si dice che $f(x)$
è integrabile su $\mathbb{R}$ se esiste un
numero I (che sarà l'integrale)
con questa proprietà:



$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che qualunque somma S
partire da una suddivisione con pezzi
tutti di lunghezza $\leq \delta$ verifica
 $|I - S| \leq \varepsilon$.

Teorema Le due definizioni (anzi 3: anche, Darboux,
Riemann sono equivalenti)

Sottocaso: sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
tale che se suddivido con pezzi qualunque $\leq \delta$, allora la
somma di Riemann corrispondente dista dall'integrale meno di ε .

Dim. Per la dimostrazione classica sappiamo che esistono
funzioni a gradino sopra e sotto
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\varphi(x)$ $\psi(x)$

tali che

$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre possiamo supporre che φ e ψ arrivino dalla
stessa suddivisione e posso supporre che i pezzi siano

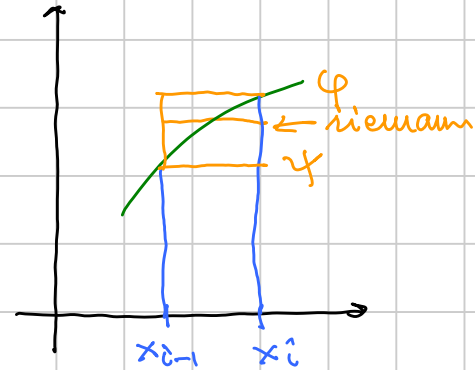
tutti piccoli quanto voglio (se serve aggiungo p.ti).
 Scelgo δ dell'unif. continuità in modo che corrisponda
 ad $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, cioè

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Ora su ogni intervallo

$$\varphi \leq \text{riemann} \leq \varphi(x)$$

differenza $\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$



Quindi

$$\int_a^b \varphi - \text{riemann} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

Esercizio Dimostrare la stessa cosa assumendo solo
 che f sia integrabile.
 — o — o —