

Risposta 2.2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso, Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ e sia
 $f: A \rightarrow B$ invertibile e CONTINUA.

Allora B è convesso e l'inversa $g: B \rightarrow A$ è continua

Dim. 1 Essendo A convesso e f iniettiva, allora per forza
 f è strettamente monotona e la sua immagine è
un convesso (lemmi precedenti).
L'inversa è monotona strettamente e ha come immagine
in A , che è convesso. Per il lemma precedente g è
continua.

— o — o —

Oss. Tutte le inverse delle funzioni "classiche" rientrano in
uno dei casi 2.1 o 2.2, posto ovviamente che le
funzioni di partenza siano continue.

— o — o —

Risposta ③ Se A e B sono convessi e $f: A \rightarrow B$ è
invertibile e derivabile ovunque, non posso
concludere che g (l'inversa) sia deriv. ovunque

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$. L'inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$
non è derivabile in $x=0$.

Teorema Sia $f: A \rightarrow B$ invertibile con A e B convessi.
Sia $g: B \rightarrow A$ l'inversa. Sia $x_0 \in \text{Int}(A)$ e sia
 $y_0 \in \text{Int}(B)$ con $y_0 = f(x_0)$.

Supponiamo $f'(x_0) \neq 0$.

Allora g è derivabile in y_0 e $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

DM PINTA

$g(f(x)) = x$. Derivo a dx e so:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1. \text{ Pongo } x = x_0 \text{ e lo finito.}$$

Il problema è che non ho dimostrato che g è derivabile.

Dim. 1 Faccio il limite del rapporto incrementale:

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Pongo $g(y) = x$, cioè $y = f(x)$
Quando $y \rightarrow y_0$ ho che $x \rightarrow x_0$
perché ho già la continuità

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \square$$

— 0 — 0 —

Oss. Vale quindi la formula (supponendo ora f derivabile in tutto A con $f' \neq 0$)

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

↓
pto x corrispondente a y

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 + x$.

Dimostrare che è invertibile, quindi calcolare $g(2), g'(2), g''(2)$ (dove g è l'inversa)

Invertibilità: 2 limiti + $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \dots$

$g(2) = \dots$ devo risolvere $x^3 + x = 2$, quindi $g(2) = 1$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

Come calcolo g'' ?

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Derivo a dx e sx

$$g''(y) = - \frac{1}{[f'(g(y))]^2} f''(g(y)) \cdot g'(y)$$

$$= - \frac{1}{[f'(g(y))]^3} f''(g(y))$$

$$f''(x) = 6x$$

Quindi $g''(2) = - \frac{1}{[f'(1)]^3} \cdot f''(1) = - \frac{1}{4^3} \cdot 6$

— o — o —

Risposta ⑤ Se A e B sono convessi e $f: A \rightarrow B$ è di classe C^k e $f' \neq 0$ in A , allora l'inversa è di classe C^k

Dim. BOOTSTRAP !!! $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$

Idea: g è derivabile, anzi C^1 , ma allora RHS è C^1 ,
ma allora g è C^2 , ma allora RHS è C^2 ,
e così via.

Se f è di classe C^k mi fermo a $g \in C^k$ perché
a quel pto posso dire che

$$\begin{array}{c} f'(g(y)) \in C^{k-1} \text{ da cui ritorno con } g \in C^k. \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ C^{k-1} \quad C^k \end{array}$$

— o — o —

Oss. Lo stesso discorso vale per le equazioni diff.

$u'(t) = \arctan u(t) \rightsquigarrow$ quanto è regolare la soluzione,
posto che esista?

Con il bootstrap si ottiene che $u \in C^\infty$. Se $u' = f(u)$
con $f \in C^{2k}$, allora ottengo $u \in C^{2k}$ e via di più in
generale.

Esempio $g(x)$ = inversa di $f(x) = x^3 + x$.

Se volessi il polinomio di Taylor con centro in $x=2$ e $n=3$?

1° modo Calcolo $g(2)$, $g'(2)$, $g''(2)$, $g'''(2)$ e uso formula

2° modo Lo impongo a coeff. incogniti

$$g(2+R) = a + bR + cR^2 + dR^3 + o(R^3)$$

e uso che

$$f(g(2+R)) = 2+R$$

$$g(2+R) + g^3(2+R) = 2+R$$

Sostituisco e trovo i coeff.

Esempio $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ — — —

Dimostrare che esiste un intervallo $(-\delta, \delta)$ tale che

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (-\delta, \delta)$$

è invertibile.

Detta g l'inversa, calcolare il polinomio di Taylor in $x=0$ di ordine 3 di $g(x)$.

Si vede subito che $f(0)=0$ e $f(x)$ è strett. crescente $f'(x) = e^{-x^2}$.

Per $x \rightarrow \pm\infty$ tende a $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \delta$

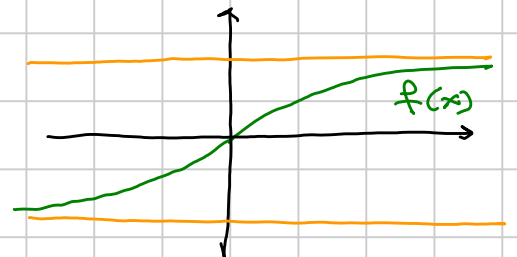
Quindi l'inversa esiste.

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + o(t^3)) dt = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$\uparrow$
 $x=0$



Sarà $g(x) = \underset{0}{a} + \underset{1}{b}x + \underset{0}{c}x^2 + dx^3 + o(x^3)$
 perché g è dispari
 $= x + dx^3 + o(x^3)$

Impongo $f(g(x)) = x$

$$f(g(x)) = g(x) - \frac{[g(x)]^3}{3} + o(x^4) = x$$

$$= x + dx^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x$$

Quindi $d = \frac{1}{3}$.

Esercizio Ottenere lo stesso risultato calcolando $g'''(0)$.
 — 0 — 0 —