

FUNZIONE INVERSA Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi.

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione iniettiva e surgettiva.

Allora f è invertibile, cioè esiste $g: B \rightarrow A$ tale che

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

Domande:

- ① Se f è monotona, g è monotona?
- ② Se f è continua, g è continua?
- ③ Se f è derivabile in $x_0 \in \text{Int}(A)$, g è derivabile in $f(x_0)$?
- ④ Se f è C^1 in A , g è C^1 in B ?
- ⑤ Se f è C^k in A , g è C^k in B ?

Risposta ① Se f è monotona e invertibile, allora f e g sono strettamente monotone (nello stesso verso)

Dim. Supponiamo f debolmente crescente (se è decrescente, il discorso è analogo).

→ Dimostro che f è strett. cresc. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbero $a_1 < a_2$ in A t.c. $f(a_1) \geq f(a_2)$, quindi violo l'iniettività.

→ Dimostro che g è strett. cresc. Prendo $b_1 < b_2$ in B e mostro che $g(b_1) < g(b_2)$. Se per assurdo non fosse così, avrei che

$$g(b_1) \geq g(b_2)$$

Applico f a gx e sy e usando la monot. di f :

$$f(g(b_1)) \geq f(g(b_2))$$

$$\begin{array}{ccc} \text{"} & & \text{"} \\ b_1 & \geq & b_2 \end{array}$$

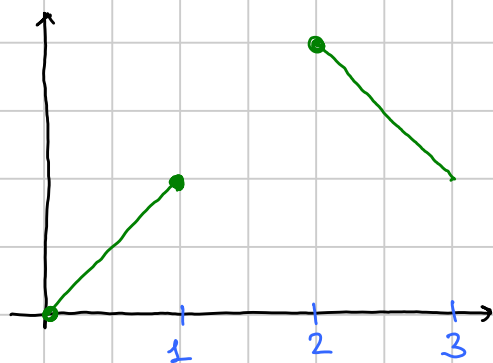
← def. funzione inversa

che è assurdo.

— o — o —

Risposta ② NO : ci sono funzioni continue la cui inversa pur esistendo non è continua

Esempio



$$A = [0, 1] \cup [2, 3)$$

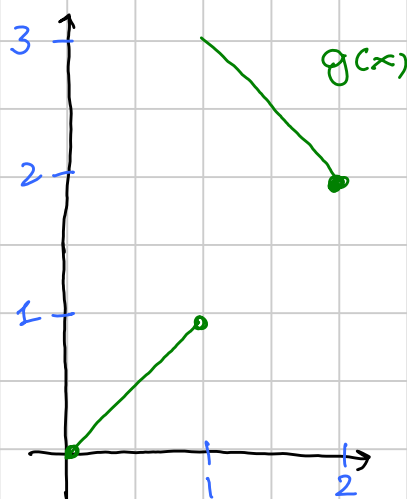
$$B = [0, 2]$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 4-x & \text{se } x \in [2, 3) \end{cases}$$

Iniettività e surg. si verificano (basta intersecare il grafico con tutte le rette $y = \lambda$ con $\lambda \in [0, 2]$ e verificare che esiste un'unica intersezione).

L'inversa è $g: [0, 2] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3)$

ha il grafico in figura, quindi non è continua in $x = 2$.

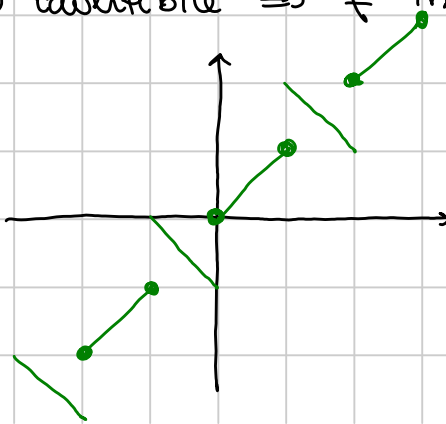


Oss. L'insieme A non è convesso e non è chiuso

Risposta 2.1 Se A è compatto, allora g è continua

Risposta 2.2 Se A è convesso, allora g è continua.

Esercizio Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile $\Rightarrow f$ monotona? NO



Lemma (DELLA SOTTO-SOTTO)

Sia x_n una successione.

Supponiamo che esista $l \in \overline{\mathbb{R}}$ con questa proprietà:

ogni sotto-successione x_{n_k} ha una sotto-sotto-succ,

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow l \quad (l \text{ è sempre lo stesso})$$

Allora $x_n \rightarrow l$.

Dim. Per assurdo (facevamo il caso $l \in \mathbb{R}$, gli altri sono uguali $\leadsto$ esercizio). Se x_n non tende ad l vuol dire che

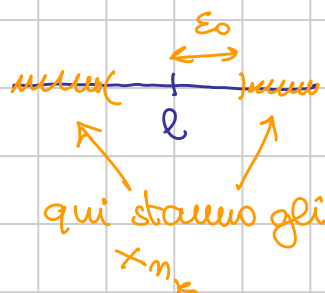
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad |x_n - l| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $n_0 = k$ e trovo $n_k \geq k$ t.c.

$$|x_{n_k} - l| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

D'altra parte x_{n_k} dovrebbe avere una sotto-sotto che tende ad l ,
il che è impossibile

— o — o —



Teorema 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto, sia $B \subseteq \mathbb{R}$,
e sia $f: A \rightarrow B$ invertibile e continua.
Allora l'inversa $g: B \rightarrow A$ è continua.

Dim Prendo un pto $b \in B$ e prendo una qualunque successione $B \ni y_m \rightarrow b$. Detto $a = g(b)$ devo dim. che

$$\begin{array}{c} g(y_m) \rightarrow g(b) = a \\ \parallel \\ x_m \end{array}$$

Gli x_n stanno in A che è compatto. Quindi ogni s.succ. ha una sotto-sotto che tende ad un certo x_∞ ,
Chi è x_∞ ?

$$x_{m_{k_i}} \longrightarrow x_\infty$$

Applico f e ottengo

$$\begin{array}{ccc} f(x_{m_{k_i}}) & \longrightarrow & f(x_\infty) \\ \parallel & & \parallel \\ y_{m_{k_i}} & \longrightarrow & b \end{array}$$

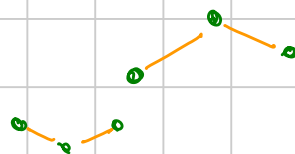
Ma allora l'unica possibilità è che sia $f(x_\infty) = b$, cioè $x_\infty = a$ (cioè l'unico elemento che va a finire in b).

Poiché ogni sotto-succ. di x_n ha una sotto-sotto che tende ad a , allora $x_n \rightarrow a$.

Lemma (del triangolino) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che non è debolmente monotona.

Allora esistono $a < b < c$ in A tali che vale una delle seguenti

- ① $f(b) > f(a)$ e $f(b) > f(c)$
- ② $f(b) < f(a)$ e $f(b) < f(c)$



Dim. Non la so fare (veloce). $\square$

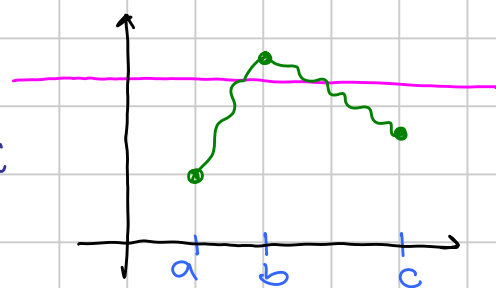
Lemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva e CONTINUA. Allora f è strettamente monotona.

Dim. A basta dimostrare che è debolmente monotona (poi la stretta segue dall'iniettività).

Supponiamo per assurdo che non sia debolmente monotona. Allora applico il lemma del triangolino.

Nel caso ①. Prendo $\lambda < f(b)$,
ma $\lambda > f(a)$ e $\lambda > f(c)$ e ho
2 intersezioni con il grafico (qui
uso convessità e esistenza zeri).

Il caso ② è analogo.



Lemma Sia A convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ monotona.

Allora f è continua se e solo se l'immagine $f(A)$ è un convesso.

Dim. $\Rightarrow$ teo. di esistenza dei valori intermedi

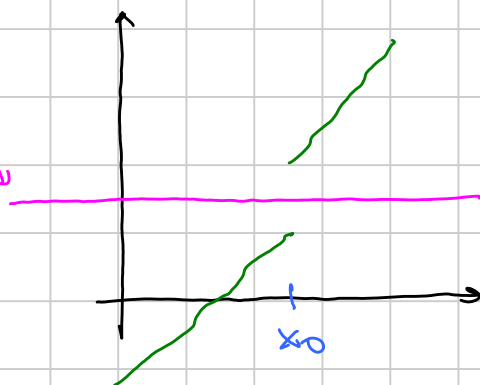
$\Leftarrow$ Supponiamo per assurdo che non sia continua in un certo p.to x_0 . Allora per forza

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

esistono per forza per monotonia

Ma allora tutto l'intervallo aperto che ha come estremi i due limiti non può essere contenuto nell'immagine.

questo valore
non lo può più
assumere.



— o — o —