

Disuguaglianze classiche di convessitàMEDIA - ARITMETICA / MEDIA QUADRATICA

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Dim. $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

con $f(x) = x^2$ che è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Dim 2 La posso riscrivere come

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$$\langle X, Y \rangle \leq \|Y\| \cdot \|X\| \quad \text{Cauchy - Schwarz.}$$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \quad Y = (1, \dots, 1)$$

— 0 — 0 —

MEDIA ARITMETICA VS MEDIA p-esima con $p \geq 1$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right]^{1/p} \quad \forall x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Dim. Jensen applicato a $f(x) = x^p$ che per $p \geq 1$ (reale) è convessa per $x \geq 0$

CONFRONTO TRA 2 MEDIE p-esime

Se $p \leq q$, allora

$$\left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right]^{1/p} \leq \left[\frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n} \right]^{1/q} \quad \forall x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Dim. Elevo tutto alla q

$$\left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right]^{q/p} \leq \frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n}$$

Ora uso Jensen con $f(x) = x^{q/p}$ (che ha esponente ≥ 1)

$$\left[\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right]^{q/p} \leq \frac{y_1^{q/p} + \dots + y_n^{q/p}}{n}$$

Ora la applico con $y_i = x_i^p$

Esercizio

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{1/p} = \max \{x_1, \dots, x_n\}$$

Sol. Wlog sia x_1 il max. Lo raccolgo

$$\left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right]^{1/p} = \underbrace{[x_1^p]^{1/p}}_{x_1} \underbrace{\left[\frac{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^p}{n} \right]^{1/p}}_1$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{n} \right]^{1/p}}_1 \underbrace{\left[\dots \right]^{p/p}}_1 \leq \underbrace{1}_1$$

MEDIA ARITMETICA VS MEDIA GEOMETRICA

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}_{\text{geometrica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{aritmetica}} \quad \forall x_1, \dots, x_n > 0$$

Dim Faccio $\log$ a dx e sx e ottengo ($\log$ è crescente)

$$\frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} \leq \log \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)$$

" Jensen al contrario " per la funzione $f(x) = \log x$ che infatti è concava per $x > 0$ (dim: $f''(x) < 0$ per $x > 0$)
— o — o —

Media geom. vs media p -esima con $p > 0$: stesso trucco di prima.
— o — o —

DISUG. DI YOUNG A 2 termini

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

$$\forall \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Caso particolare: $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$

Dim Faccio $\log$ a dx e sx:

$$\log a + \log b \leq \log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right)$$

Poiché $\log x$ è concava:

$$\lambda \log A + (1-\lambda) \log B \leq \log (\lambda A + (1-\lambda) B)$$

$$\log a + \log b \quad \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right)$$

$$A = a^p, \quad B = b^q, \quad \lambda = \frac{1}{p}, \quad 1-\lambda = \frac{1}{q}$$

YOUNG A 3

$$abc \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q + \frac{1}{r} c^r \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

Dim. Ci si riduce a $\log a + \log b + \log c \leq \log(\text{RHS})$

$$\lambda_1 \log A + \lambda_2 \log B + \lambda_3 \log C \leq \log(\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C)$$

$$\text{Uso } A = a^p, B = b^q, C = c^r, \lambda_1 = \frac{1}{p}, \lambda_2 = \frac{1}{q}, \lambda_3 = \frac{1}{r}$$

CAUCHY - SCHWARZ A 3

$$\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^2)^{1/2} (\sum b_i^2)^{1/2} \quad (\text{a 2 specie})$$

$$\sum a_i b_i c_i \leq (\sum a_i^p)^{1/p} (\sum b_i^q)^{1/q} (\sum c_i^r)^{1/r} \quad a_i, b_i, c_i \geq 0$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

Idea della dim.

Step 1 Osservo che LHS e RHS sono omogenei, cioè se moltiplico tutti gli a_i per un certo λ non cambia niente. Idem per i b_i ed i c_i .

Quindi wlog posso assumere che i 3 fattori al RHS siano uguali ad 1.

Step 2 Uso la Young a 3 sui termini del LHS

$$\begin{aligned} \sum a_i b_i c_i &\leq \sum \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q + \frac{1}{r} c_i^r \\ &= \frac{1}{p} \underbrace{\sum a_i^p}_1 + \frac{1}{q} \underbrace{\sum b_i^q}_1 + \frac{1}{r} \underbrace{\sum c_i^r}_1 \\ &\geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Algebra delle convesse

- ① Somma di convesse è convessa
- ② Convessa · costante positiva = convessa
- ③ Convessa · costante negativa = concava
- ④ Prodotto di 2 convesse? In generale va male

$f(x) = x^2 - 1$ è convessa, ma $(x^2 - 1)^2$ non lo è (si vede perché si annulla in ± 1 e non è ≤ 0 in mezzo)

Brutal mode $(f(x) \cdot g(x))'' = (f'g + fg')'$
 $= f''g + 2f'g' + fg''$

Forse vero: se f e g sono $\rightarrow$ convesse
 $\rightarrow$ positive ≥ 0
 $\rightarrow$ monotone nello stesso verso

allora $f(x) \cdot g(x)$ è convessa

Dm. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
 $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$

Moltiplico (e posso)

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &\leq \lambda^2 f(x)g(x) + (1-\lambda)^2 f(y)g(y) + \\ &\quad + \lambda(1-\lambda)f(x)g(y) + \lambda(1-\lambda)f(y)g(x) \\ &\leq \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{speranza} \end{aligned}$$

Controllo la speranza: viene $\underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}_{\text{hanno lo stesso segno se monotone dalla stessa parte}} \geq 0$