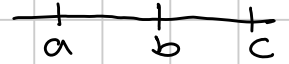


Lemma dei tre rapporti incrementali Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è convesso e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora

$$R(a,b) \leq R(a,c) \leq R(b,c)$$

$$\forall \underbrace{a < b < c}_{\in A}$$



Oss. Il Lemma implica in particolare che $R(a,b) \leq R(b,c)$

Lemma inverso Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ è convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo che

$$R(a,b) \leq R(b,c)$$

$$\forall \underbrace{a < b < c}_{\in A}$$

Allora $f(x)$ è convessa in A

Dim. Dovo dim. che

$$f\left(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y}_b\right) \leq \lambda \underbrace{f(x)}_a + (1-\lambda) \underbrace{f(y)}_c$$



Per ipotesi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

Moltiplico

$$(c-b)(f(b) - f(a)) \leq (b-a)(f(c) - f(b))$$

riorganizzo

$$(c-a)f(b) \leq (c-b)f(a) + (b-a)f(c)$$

Divido

$$f(b) \leq \underbrace{\frac{c-b}{c-a}}_{\lambda} f(a) + \underbrace{\frac{b-a}{c-a}}_{1-\lambda} f(c)$$

Dim. che $f'(x)$ esiste deb. cresc. $\Rightarrow f(x)$ convessa

$$f'(x) \text{ deb. cres.} \Rightarrow R(a,b) \leq R(b,c)$$

$$\forall a < b < c \Rightarrow \text{conv.}$$

f' in un pto tra a e b f' in un pto tra b e c



DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Sia $n \geq 2$ un intero, siano $x_1, \dots, x_n$ p.ti di A (non nec. distinti), siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri reali ≥ 0 tali che

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \quad (\text{quindi } \lambda_i \in [0, 1])$$

Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Disug. di Jensen

Dim. Per induzione.

Passo base $n = 2$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) & \leq & \lambda_1 f(x_1) & + & \lambda_2 f(x_2) \\ \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \lambda & x & (1-\lambda)y & & \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{array}$$

Vero per definizione di funzione convessa

Passo induttivo Assumo per ipotesi che valga con n e dimostro per $n+1$.

Prendo $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ e prendo $\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$.
Almeno uno dei λ_i è $\neq 1$, wlog sia λ_{n+1} . Allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} =$$

$$= (1 - \lambda_{n+1}) \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1 - \lambda_{n+1}} + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\left(\underbrace{(1 - \lambda_{n+1}) \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1 - \lambda_{n+1}}}_{(1-\lambda) \quad y} + \underbrace{\lambda_{n+1} x_{n+1}}_{\lambda \quad x} \right)$$

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n}_{n \text{ termini}} \right)$$

Nell'ultima f ho la somma di n termini i cui coeff. hanno somma

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$$

Quindi per ipotesi induttiva ottengo

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n) \right]$$

Semplificando ho la tesi.

— o — o —

Oss. Un caso particolare è quello con $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ in cui diventa

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Dimostrarla direttamente per induzione è faticoso.

— o — o —

Disuguaglianze di convessità

① Jensen

② Funzione $\geq$ retta tangente

— o —

Def. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

↑
convesso

— f è convessa. Questo equivale a girare la disug. nella definizione, cioè

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Tutti gli enunciati per le convesse hanno un analogo per le concave.

— o — o —

Fatto 1 Sia $x_0 \in \text{Int}(A)$ un p.to tale che
 $0 \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ cioè $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$
 Allora x_0 è un p.to di minimo globale.

Dim. $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in A$
 $\uparrow$
 vale per ogni $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Se scelgo $m=0$ ottengo

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A$$

Fatto 2 Se f è C^2 , star sopra la retta tangente è una conseguenza di Taylor - Lagrange

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tang.}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0}$$

Fatto 3 BERNOULLI GENERALIZZATA

Bernoulli classica: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}$

" generale: $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad \forall x > -1, \forall \alpha \geq 1$

Dim. Prendo $f(x) = (1+x)^\alpha$. Si dimostra che per $\alpha \geq 1$
 $f(x)$ è convessa per $x > -1$
 $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad f''(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{>0} \underbrace{(1+x)^{\alpha-2}}_{>0}$

$$\underbrace{(1+x)^\alpha}_{f(x)} \geq \underbrace{1+\alpha x}_{\text{retta tangente in } x=0} = f(0) + f'(0)x$$

Oss. La Bernoulli classica con n pari vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Motivo: $f(x) = (1+x)^n$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$ per n pari.