

Nuova dim. che $f'(x)$ esiste ed è debolmente crescente implica $f(x)$ convessa.

Dati comunque $a < b < c$ devo dimostrare che $f(b) \leq$ retta.

Se per assurdo fosse $f(b) >$ retta, allora avremmo che

$$r(b,a) > r(c,a) > r(c,b)$$

Tuttavia dalla crescenza della derivata abbiamo dedotto che

$$r(b,a) \leq r(c,b).$$

Questa non usa gli integrali, anche perché abbiamo dimostrato il teo. fond. del calcolo integrale assumendo la cont. della derivata, che qui non è un'ipotesi.

— o — o —

Esercizio Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, e sia x_0 un p.to in cui

$f'_+(x)$ è continua.

Allora $f'(x_0)$ esiste.

Dim. Devo dimostrare che $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Intanto so che è $\leq$ sempre per un fatto generale.

Per un teo. precedente sappiamo che

$$f'_+(x_0 - R) \leq f'_-(x_0)$$

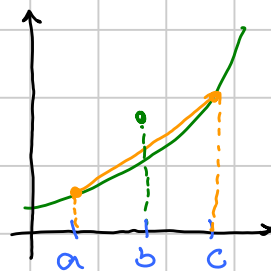
$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ x_0 - R \quad x_0 \quad x_0 + R \end{array}$$

Facendo il limite per $R \rightarrow 0^+$ ottengo la tesi

$$f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0).$$

Qui ho usato la continuità di f'_+ in x_0

— o — o —



Grafici monotoni Posso pensare la "derivata" di $|x|$ come

In $x=0$ ha senso dire che la derivata sono tutti gli $m \in [-1, 1]$ perchè sono tutti i possibili coeff. angolari di rette che stanno sotto il grafico.



— o — o —

FUNZIONI STRETTAMENTE CONVESSE

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Casi banali in cui vale l'uguale:

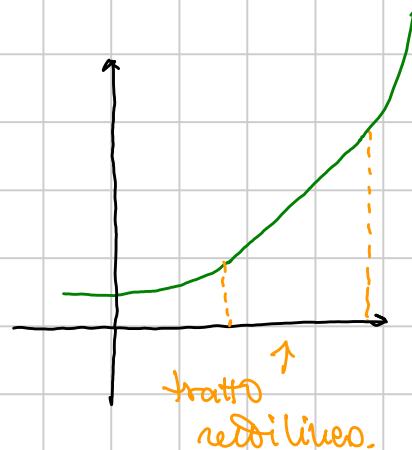
- $x = y$ (PQ degenera a un p.to)
- $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$ (estremi P e Q)

Def. Una funzione si dice strettamente convessa se è convessa e gli unici casi di uguaglianza sono quelli banali (cioè il segmento PQ sta "veramente" sopra il grafico)

Oss. In termini di grafico vuol dire che c'è un tratto rettilineo, non necessariamente parallelo all'asse x .

Teorema Supponiamo che $f'(x)$ esista in A.

Allora



$$f \text{ è strett. convessa} \Leftrightarrow f' \text{ è strett. crescente}$$

Idea della dim. Come prima, solo osservando che

stretta convessità $\Leftrightarrow$ disug. strette nel lemma dei
3 rapporti incrementati
— 0 — 0 —

CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA

Le funzioni convesse non sono obbligate ad avere derivata seconda. Se ce l'hanno, allora è una questione di segno.

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in \text{Int}(A)$.

Allora

$$f \text{ convessa in } A \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \text{Int}(A)$$

$$f \text{ stretta. conv. in } A \Leftrightarrow f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \text{Int}(A)$$

C'è anche: $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{Int}(A)$ e annullamento
sporadico (cioè $f''(x)$ non si annulla in un
intero intervallo) $\Rightarrow f$ stretta. conv. in A .

— 0 — 0 —

SOPRAGRAFICI Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ qualunque. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una
funzione.

Si dice sopragrafico di f l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Analogamente posso definire il sottografico.

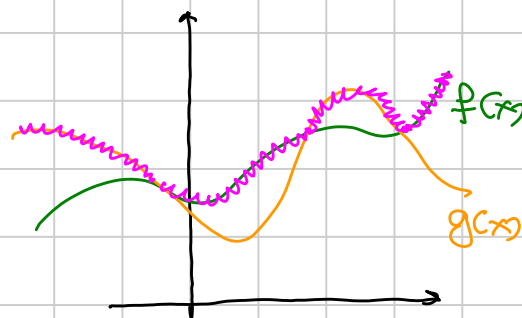
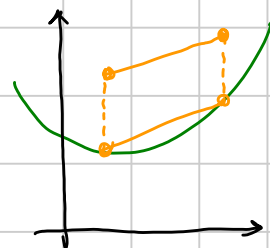
Oss. Una funzione è convessa $\Leftrightarrow$ il sopragrafico è convesso

Esercizio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso, e siano
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due
funzioni convesse.

Allora

$$R(x) := \max \{f(x), g(x)\}$$

è convessa.



Dim. 1

Step 1 Il sopragrafico di $R(x)$ è

l'intersezione dei sopragrafici, che sono convessi

Step 2 L'intersezione di due insiemi convessi
è a sua volta convessa

Dim. 2 Per via algebrica. Prendiamo $a < b < c$ $b = \lambda a + (1-\lambda)c$
e voglio dim. che

$$R(b) \leq \lambda R(a) + (1-\lambda) R(c)$$

Ci sono 2 casi.

• Se $R(b) = f(b)$, allora

f è conv.

$$\begin{aligned} R(b) = f(b) &\stackrel{\downarrow}{\leq} \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c) \\ &\leq \lambda R(a) + (1-\lambda) R(c) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $f \leq R$ + coeff. positivi

• Se $R(b) = g(b)$, allora stessa con $g(b)$ invece di $f(b)$

Conseguenza: $|x| = \max \{x, -x\}$ è convessa.

Formula utile per il futuro:

$$\max \{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$