

MODULO DI CONTINUITÀ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Si dice modulo di continuità di f in A la funzione

$$\omega: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

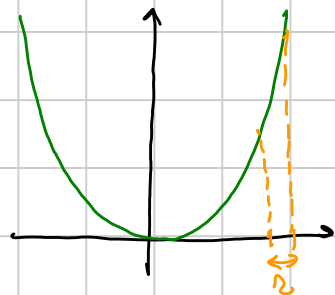
definita come

$$\omega(r) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : |x - y| \leq r, x \in A, y \in A \}$$

Bontalmente: il max gap verticale posto che x e y distano meno di r

Oss. La definizione è mal posta, nel senso che il sup può fare $+\infty$ addirittura per ogni $r > 0$: basta pensare a $f(x) = x^2$ con $A = \mathbb{R}$.

Oss. Anche se $f(x)$ è unif. continua in A , può accadere che $\omega(r) = +\infty$ per alcuni valori di $r > 0$.



Esempio: $f(x) = x^2$ con $A = \mathbb{Z}$ è unif. cont. gratis (posso prendere $\delta = \frac{1}{10}$ per ogni $\varepsilon > 0$)
però $\omega(r) = +\infty$ per ogni $r \geq 1$.

Oss. $\omega(r)$, come funzione di r , è debolmente crescente per ovvie ragioni.

Prop. Se f è unif. continua in A , allora esiste $r_0 > 0$ tale che
 $\omega(r) < +\infty \quad \forall r \in (0, r_0)$

Dim. Uso la def. di uniforme continuità con $\varepsilon = 1$ ($0 < \varepsilon \leq 35$).

Trovo un $\delta > 0$ t.c. $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Quindi $\omega(r) \leq 1$ per ogni $r \in (0, \delta)$.

Oss. Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e ω è il suo modulo di continuità, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Il modulo di continuità permette di stimare il gap verticale in funzione del gap orizzontale.

Oss. Le funzioni Lip. hanno $\omega(r) \leq Lr$, quelle α -Hölder hanno $\omega(r) \leq Hr^\alpha$.

Oss. Sia f una funzione Lip. Voglio approssimare $f(x_0)$ commettendo un certo errore ε . Allora devo appross. x_0 con errore $\sim \frac{\varepsilon}{L}$

Se f è $\frac{1}{2}$ -Hölder, se voglio ε in arrivo devo avere $\frac{\varepsilon^2}{H^2}$ in partenza

$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\varepsilon} \leq H \underbrace{|x-y|^{1/2}}_{\frac{\varepsilon^2}{H^2}}$$

quindi unif. cont.
↑ per H.C

Esercizio Sia $A = [a, b]$, sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $\omega(r)$ il suo modulo di continuità. Allora

① $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega(r) = 0$

② è subadditivo, cioè

$$\omega(r_1 + r_2) \leq \omega(r_1) + \omega(r_2) \quad \forall r_1 > 0 \quad \forall r_2 > 0$$

Dim 1 Uso la def. di funzione unif. continua.

Dato $\varepsilon > 0$ trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x-y| < \delta$$

Questo è come dire che

$$\omega(r) \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad r < \delta$$

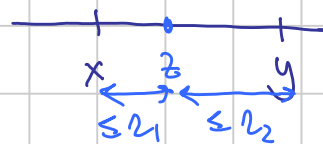
che è quello che serve per dire che $\omega(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0^+$

Dim 2 (Qui si usa pesantemente l'intervallo)

Presumiamo x e y in $[a, b]$ con $|y - x| \leq \eta_1 + \eta_2$.

Wlog sia $y \geq x$.

Allora esiste $z \in [x, y]$ tale che



$$|z - x| \leq \eta_1 \quad \text{e} \quad |y - z| \leq \eta_2$$

$$\begin{aligned} \text{Ora} \quad |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f(z)| + |f(z) - f(x)| \\ &\leq \omega(\eta_2) + \omega(\eta_1) \end{aligned}$$

Facendo il sup al variare di x e y con $|y - x| \leq \eta_1 + \eta_2$ ottengo la tesi

— o — o —

Teorema (Integrabilità delle funzioni continue)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f è integrabile in $[a, b]$.

Dim. Devo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due step function $\varphi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

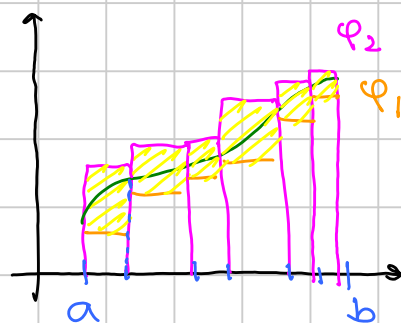
e

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx \leq \varepsilon$$

Uso la def. di unif. cont. con $\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Trovo $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{se} \quad |x - y| \leq \delta$$



Suddivido $[a, b]$ in tutti pezzi di ampiezza $\leq \delta$. In ogni intervallo definisco $\varphi_2(x)$ come il max di $f(x)$ nell'intervallo
e " " $\varphi_1(x)$ come il min " " " " " "

Questo garantisce la $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ in $[a, b]$.

In ogni intervallo $\underbrace{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{due valori assunti da } f \text{ nell'intervallo}}} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$
e quindi

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

— 0 — 0 —

Osservazione Ho dimostrato che qualunque suddivisione con pezzi di ampiezza $\leq \delta$ porta a distanza $\leq \varepsilon$ tra $\int \varphi_1$ e $\int \varphi_2$.

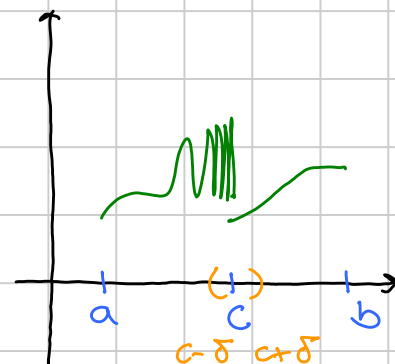
— 0 — 0 —

2ª variante Cosa accade se f è limitata in $[a, b]$ e continua in tutti i pti meno uno $c \in (a, b)$.

Ce la caviamo lo stesso!

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$. Poiché $f(x)$ è limitata esiste $M \in \mathbb{R}$ b.c.
 $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

Costruisco un intervallo intorno a c di ampiezza $\frac{\varepsilon}{6M}$. Sia $[c-\delta, c+\delta]$ questo intervallo.



Tra a e $c-\delta$ la $f(x)$ è continua, quindi posso definire $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ step function in maniera tale che

$$\int_a^{c-\delta} (\varphi_2 - \varphi_1) dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Analogamente posso definire φ_1 e φ_2 in $[c+\delta, b]$ in modo che

$$\int_{c+\delta}^b (\varphi_2 - \varphi_1) dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Nell'intervallo $(c-\delta, c+\delta)$ scelgo $\varphi_2(x) = M$ e $\varphi_1(x) = -M$ e quindi

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} [\varphi_2 - \varphi_1] dx = 2M \cdot \text{ampiezza} = 2M \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Mettendo insieme i 3 pezzi ottengo esatt. ε .

— o — o —

Domanda È vero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che ogni suddivisione con pezzi di lunghezza $\leq \delta$ porta a funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ con $\int \varphi_2 - \varphi_1 \leq \varepsilon$.

— o — o —