

Come dimostro che una funzione è o non è Lip., Hölder, unif. continua?

Unif. continuità

Se sono per il **SI**:

- Heine - Cantor
- Heine - Cantor su un insieme più grande
- uso Lip. o Hölder
- divido l'insieme in due parti, ragiono separatamente e poi spero nel ricolloamento
- spero nella semiretta + limite all'infinito
- ultima spiaggia: definizione

Se sono per il **NO**:

- spero non sia estendibile alla chiusura
- spero non sia sublineare (oss: $f(x) = x^2$ su $\mathbb{Z}$ è unif. cont.)
- uso la def. negata (cioè trovo p.ti arbitrariamente vicini con immagini lontane)

Lipschitzianità

Se sono per il **SI**:

- spero nella limitatezza della derivata, posto che esista
- spero nella composizione di Lip.
- definizione

Se sono per il **NO**:

- spero nella non limitatezza della derivata
- spero nella non unif. continuità
- uso la definizione negata

Hölderianità

Se sono per il SI

- spero nella lip.
- spero nella composizione
- spero nella lip. di un'opportuna potenza (vedi dopo)
- uso la def.

Se sono per il NO

- spero che mandi l'unif. continuità
- uso la def. negata.

— o — o —

$$f \text{ è } \frac{1}{2} - \text{Hölder} \Leftrightarrow f^2 \text{ è lip.}$$

ENTRAMBE LE IMPLICAZIONI SONO FALSE (con ogni α)

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x} + 1$ è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $[0,1]$, ma

$$f^2(x) = x + 1 + 2\sqrt{x} \text{ non è lip. in } [0,1]$$

Quindi $\Rightarrow$ è senza speranza.

Esempio 2 $f(x) = \pm 1$ a caso. Allora $f^2(x)$ è lip. (anzi!)
ma f non è nemmeno continua

Proposizione (su un intervallo). Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f(x)$ continua in $[a,b]$

(ii) $f^2(x)$ lip. in $[a,b]$

Allora $f(x)$ è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $[a,b]$.

Dim. Pongo $g(x) = f^2(x)$ e quindi per ipotesi

$$|g(y) - g(x)| \leq L |y - x| \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in [a,b]$$

Ora

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |\sqrt{g(y)} - \sqrt{g(x)}| \quad \left| \sqrt{A} - \sqrt{B} \right| \leq \sqrt{|A-B|} \\ &\leq \sqrt{|g(y) - g(x)|} \\ &\leq \sqrt{L|y-x|} \\ &= \sqrt{L} \cdot |y-x|^{1/2} \end{aligned}$$

Così non va, perché non ho usato la continuità. Il problema sta nello scrivere $f(x) = \sqrt{g(x)}$, cosa che vale solo se $f(x) \geq 0$.

Per aggiustarlo considero 3 casi

- Se $f(x) \geq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora già funziona
- Se $f(x) \leq 0$ e $f(y) \leq 0$, cambiano i segni nel valore assoluto, quindi resta uguale.

- Resta il caso, wlog, in cui $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$.

Esistono in un intervallo, ed avendo la continuità, so che esiste z tra x e y tale che $f(z) = 0$.

A quel p.to concludo spezzando

$$|f(y) - f(x)| \stackrel{=}{\leq} |f(y) - f(z)| + |f(z) - f(x)|$$

$$\text{come sopra} \rightarrow \leq \sqrt{L} |y-z|^{1/2} + \sqrt{L} |z-x|^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{L} |y-x|^{1/2} + \sqrt{L} |y-x|^{1/2} = 2\sqrt{L} |y-x|^{1/2}$$

$\uparrow$
 z è tra x e y .

Oss. Se $\alpha = \frac{1}{n}$ con n dispari non serve la continuità

Oss. Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora

$$f(x) \text{ è } \alpha\text{-Höld} \iff |f(x)| \text{ è } \alpha\text{-Höld}$$

stessa dimostrazione con lo 0 in mezzo,

Esempio 1 $f(x) = x \log x$ $A = (0,1)$ $B = (1, +\infty)$

In B $f(x)$ non è sublineare, in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

quindi NON è unif. continua, dunque nemmeno Höld o Lip.

In A non è Lip, perché $f'(x) = \log x + 1$ non è limitata.

Posso estendere f ad una funzione continua in $[0,1]$, quindi è unif. cont. in $[0,1]$ (Q' estensione), quindi $f(x)$ è unif. cont. in $(0,1)$.

È $\frac{1}{2}$ -Hölder perché $f^2(x) = x^2 \log^2 x$ è Lip. in $(0,1)$ perché ha derivata

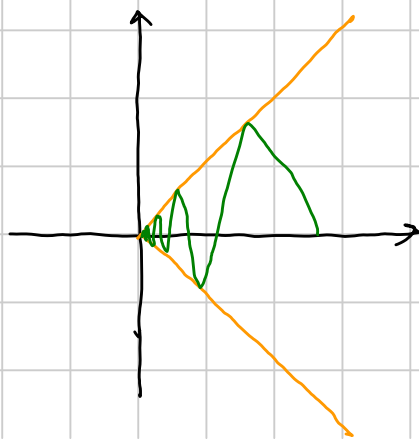
$$2x \log^2 x + 2x^2 \log x \cdot \frac{1}{x}$$

e questa è limitata in $(0,1)$ in quanto la posso estendere e applicare W in $[0,1]$ continua

È α -Höld per ogni $\alpha \in (0,1)$ perché $|f(x)|^{\frac{1}{\alpha}}$ è Lip. per ogni $\alpha \in (0,1)$ (derivata limitata).

Esempio 2 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $A = (0,1)$

Unif. cont. sì: estendo (posso), quindi HC in $[0,1]$



lip. NO : $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} x \cos \frac{1}{x}$

$$= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

e questa non è limitata (ma va dimostrato!!!)

È $\frac{1}{2}$ -Hölder in quanto $f^2(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ è lip, perché la sua derivata è

$$2x \sin^2 \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}} \right)$$

e ciò che resta è limitato.

È α -Hölder almeno per $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Resta da dimostrare che non è α -Hölder per $\alpha > \frac{1}{2}$.

C'è poco da fare: bisogna negare la definizione usando p.ti opportuni.

Vado a supporre che lo sia e scrivo

$$|f(y_m) - f(x_m)| \leq H |y_m - x_m|^\alpha \quad (\alpha > \frac{1}{2})$$

Facendo il limite per $m \rightarrow \infty$ trovo un assurdo.

