

TEOREMI SULLE FUNZIONI UNIF. CONTINUE

Teorema 1 (HEINE - CANTOR)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) A è compatto.

Allora f è unif. continua.

Teorema 2 (Teorema di estensione)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia uniformemente continua in A .

Allora è possibile estendere f ad una funzione continua

su $\text{Clos}(A)$, cioè esiste $\hat{f}: \text{Clos}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c.
 $\downarrow$
 anch'è unif. continua

$$\hat{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

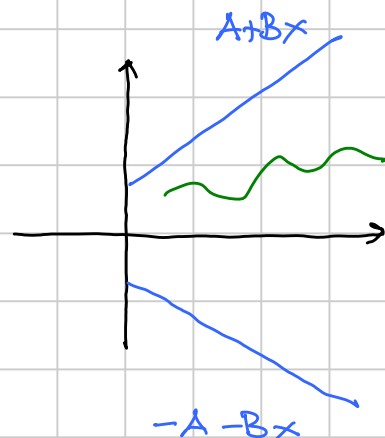
Proposizione (Unif. continua $\Rightarrow$ sublineare)

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: \underbrace{[a, \infty)}_{\text{semitretta}} \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che f sia unif. continua.

Allora f è sublineare, cioè esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq A + Bx \quad \forall x \geq a$$



Proposizione Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, +\infty)$

(ii) esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Allora f è unif. continua in $[a, +\infty)$.

Corollario Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, +\infty)$

(ii) g è unif. continua in $[a, +\infty)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$

Allora f è unif. continua in $[a, +\infty)$.

Dim. $f(x) = g(x) + \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{\text{continua + ha limite a } +\infty, \text{ quindi è unif. cont.}}$
 $\downarrow$
unif. cont.
— o — o —

Dim. Heine - Cantor per assurdo Supponiamo per assurdo che f non sia unif. continua in A . Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{k}$ (o qualunque cosa che tenda a 0)

Trovo x_k e y_k in A t.c.

$$|x_k - y_k| \leq \frac{1}{k}$$

$$|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_0$$

Poiché A è compatto, quindi compatto per successioni, esiste una s. succ. di x_k che converge ad un certo $x_\infty \in A$, diciamo

$$x_{k_n} \rightarrow x_\infty$$

USO COMPATTEZZA

↑ stesso.

Allora anche $y_{k_n} \rightarrow x_\infty$ per i carabinieri

$$x_{k_n} - \frac{1}{k_n} \leq y_{k_n} \leq x_{k_n} + \frac{1}{k_n}$$

Ma allora $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0$

↓ ← USO CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI

$$0 = |f(x_\infty) - f(x_\infty)| \geq \varepsilon_0$$

— 0 — 0 —

Lemma 1 Se $x \in \text{Clos}(A)$, allora esiste
 $A \ni a_n \rightarrow x$

Lemma 2 Le funzioni unif. continue mandano succ. di Cauchy in succ. di Cauchy. Detto meglio:
se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è unif. cont. e a_n è una succ. di Cauchy in A , allora $f(a_n)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

Oss. Non è vero per le funzioni continue ($f(x) = \frac{1}{x}$, $a_n = \frac{1}{n}$)

Dim. Lemma 2 Voglio dim. che $f(a_n)$ è di Cauchy, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0$$

Prendo ε e prendo il corrispondente $\delta > 0$ dato dalla unif. continuità. Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ in modo tale che

$$|a_n - a_m| < \delta \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0 \quad (\text{posso perché } a_n \text{ è di Cauchy})$$

Ma allora per unif. cont.

$$|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$$

Dim. teo. di estensione Devo definire $\hat{f} : \text{Clos}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ che estende f .

Prendo $x \in \text{Clos}(A)$. Per il lemma 1 esiste

$$A \ni a_n \rightarrow x.$$

Poiché a_n ha limite, sarà sicuramente di Cauchy.

Per il lemma 2 anche $f(a_n)$ è di Cauchy.

Per la completezza dei reali $f(a_n)$ ha limite.

Posso quindi definire

$$\hat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)$$

ho appena dimostrato che esiste

Serve una verifica importante. Se $A \ni b_m \rightarrow x$ è un'altra successione, allora deve succedere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(b_m)$$

Modo elegante: costruire una terza $a_n \rightarrow x$ usando a_n sui pari e b_n sui dispari.

In alternativa, fisso $\varepsilon > 0$ qualunque e prendo il δ corrispondente della uniforme continuità.

Definitivamente

$$|a_n - b_n| \leq |a_n - x| + |b_n - x| < \delta$$
$$< \frac{\delta}{2} \qquad < \frac{\delta}{2}$$

quindi per unif. continuità $|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$.

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ ho che i 2 limiti

distano meno di ε . Poiché ε è arbitrario ho finito, cioè

$\hat{f}$ è ben definita

Restano da fare 2 cose:

① dimostrare che estende f

② dimostrare che $\hat{f}$ è unif. continua in $\text{Clos}(A)$.

① è facile: se $x \in A$, allora lo posso approssimare con $a_n \equiv x$ da cui

$$\hat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x)$$

② Dimostro che $\hat{f}$ è unif. continua in $\text{Clos}(A)$ con gli stessi ε/δ che andavano bene per f .
Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$x \in \text{Clos}(A), y \in \text{Clos}(A), |x - y| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| < \varepsilon$$

Per definizione di $\hat{f}$ esistono

$$\begin{array}{ll} A \ni a_n \rightarrow x & f(a_n) \rightarrow \hat{f}(x) \\ A \ni b_n \rightarrow y & f(b_n) \rightarrow \hat{f}(y) \end{array}$$

Definitivamente

$$\underbrace{|a_n - b_n|}_{\downarrow \text{tende a}} < \delta$$

tende a $|x - y| < \delta$

Ma allora per uniforme continuità (ho usato il δ che corrisp. a ε)

$$|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$$

Passando al limite ottengo

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon.$$

Se volevo $< \varepsilon$ potevo partire all'inizio con il δ che corrisponde a $\frac{\varepsilon}{2}$

— o — o —