

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. di continuità (ϵ/δ) Si dice che f è continua in A se

$$\forall x \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A$$

δ dipende da ϵ ed x
Potrei scrivere $\delta(\epsilon, x)$

Ancora più precisamente

$$\forall x \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Def. di continuità UNIFORME Si dice che f è unif. cont. in A se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

δ dipende solo da ϵ e
va bene per tutti gli $x \in A$, quindi δ è UNIFORME

Cosa vuol dire che f NON è unif. continua. Devo negare la definizione.

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$$

negazione dell'unif. continuità

Brutalmente: esistono x e y in A vicini quanto voglio, ma con le immagini distanti.

Prop. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana.
Allora f è unif. continua in A .

Dim. Per ipotesi esiste L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Voglio dim. che f è unif. continua. Scelgo $\varepsilon > 0$ qualunque e voglio trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Basta scegliere $\delta > 0$ t.c. $L\delta = \varepsilon$, cioè $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < \underset{\substack{\uparrow \\ |x - y| < \delta}}{L\delta} = \varepsilon$$

Oss. importante L'unif. continuità dipende dall'insieme, cioè una certa $f(x)$ può essere unif. continua in un insieme e non in un altro.

Esempio $f(x) = x^2$ $A = [-5, 7]$

In questo insieme è lip., quindi unif. continua.

$f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$ Dico che su questo insieme non è unif. continua. Per dimostrarlo, devo trovare x e y in $\mathbb{R}$ molto vicini con le immagini lontane. Posso fare

$$x = a, \quad y = a + \delta \quad y^2 - x^2 = (a + \delta)^2 - a^2 = 2a\delta + \delta^2 \geq 2a\delta$$

Se prendo $a = \frac{1}{\delta}$ ho ottenuto due p.ti x e y che distano δ , le cui immagini distano almeno 2.



Oss. Dal p.to di vista pratico, l'uniforme continuità risponde a questa domanda: voglio approssimare $f(x)$ commettendo un errore $< \varepsilon$. Basta calcolare $f(y)$ con un qualunque y che approssima x a meno di δ .
Se l'errore orizzontale è piccolo, allora l'errore verticale è piccolo.

Proprietà semplici delle funz. unif. continue

① La somma di funz. unif. cont. in A è unif. continua in A .

Dim. Siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont.

Fisso $\varepsilon > 0$.

Per l'unif. continuità di $f(x)$ esiste $\delta_1 > 0$ t.c.

$$|x-y| < \delta_1 \quad x \in A \quad y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente per la $g(x)$ esiste $\delta_2 > 0$ t.c.

$$|x-y| < \delta_2 \quad x \in A \quad y \in A \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ma allora se $|x-y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ per forza

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

$< \frac{\varepsilon}{2} \qquad \qquad \qquad < \frac{\varepsilon}{2}$

② Il prodotto di una funz. unif. cont. per una costante è unif. cont.

Dim. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont. $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ è banale.

Altrimenti

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$< \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$

Basta scegliere $\delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ se $|x-y| < \delta$

③ Il prodotto di due funs. unif. cont. in generale NON è unif. cont.

Esempio $f(x) = x$ è Dip. in $\mathbb{R}$, quindi unif. cont.
 $f(x) \cdot f(x) = x^2$ non lo è.

④ $f(x)$ e $g(x)$ sono unif. cont. + limitate, allora $f(x) \cdot g(x)$ è unif. continua.

Dim.

Brutta:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2M}} + M \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2M}} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

termini uniti
↙ ↘

Fisso $\varepsilon > 0$. Sia M b.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$

$|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$

Uso unif. cont. di $f(x)$ con $\frac{\varepsilon}{2M}$ e trovo $\delta_1 > 0$ t.c. ...

" " " " $g(x)$ con $\frac{\varepsilon}{2M}$ e trovo $\delta_2 > 0$ t.c. ...

Quindi se $|x - y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ allora faccio il conto della brutta.

Esercizio E se una sola delle 2 è limitata?

⑤ $f(x)$ unif. cont. in A + unif. cont. in $B \Rightarrow$
unif. cont. in $A \cup B$

NO! Esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$ (A)
(B)

⑥ $f(x)$ unif. cont. in $[0, 2]$ + unif. cont. in $[1, 3]$
Allora $f(x)$ è unif. cont. in $[0, 3]$.

(Esercizio)

Oss. filosofica La continuità è un concetto puntuale,
l' unif. continuità dipende dall' insieme.
La continuità è un concetto topologico,
l' unif. continuità è un concetto metrico.

— o — o —