

LE TRE FACCE DELLA COMPATTEZZA

Def. (già data.) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se è limitato + chiuso.

Prop. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e non vuoto, allora $\inf A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in A$, quindi A ammette minimo

Dim. $\inf A \in \mathbb{R}$ perché A è limitato (basterebbe limitato superiormente).

Sia ora $l = \inf A$. Per la caratterizzazione

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \leq l + \varepsilon, \text{ e in particolare} \\ l \leq a \leq l + \varepsilon$$



Questo dice che $l \in \text{Clos}(A) = A$

↑
perché A è chiuso.

Oss.1 Analogamente, $\sup A \in A$, quindi A ammette massimo.

Oss.2 Non è detto che $\max / \min$ di A siano p.ti di accumulazione.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto per successioni se ogni successione a valori in A ammette almeno una s. succ. convergente ad un elemento di A .
(se $a_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $a_{n_k} \rightarrow a_\infty \in A$)

Teorema Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è compatto per successioni.

Dim. Compatto $\Rightarrow$ compatto per successioni : enunciato stesso di Bolzano - Weierstrass,

Compatto per successioni $\Rightarrow$ compatto

Devo dimostrare che $\bar{A}$ è limitato e chiuso. Supponiamo per assurdo che non sia vero.

- Mettiamo che A non sia limitato, e mettiamo che sia $\sup A = +\infty$ (il caso inf $A = -\infty$ è analogo).

Allora per il solito lemma esiste

$$A \ni a_n \rightarrow +\infty$$

Questa non può avere s.succ. convergenti ad elementi di A .

- Mettiamo che A non sia chiuso. Allora esiste almeno un pto $x_0 \in \mathbb{R}$ che sta in $\text{Clos}(A)$, ma non in A . Allora esiste una successione

$$A \ni a_n \rightarrow x_0 \notin A$$

È chiaro che tutte le s.succ. di a_n continuano a tendere a x_0 e quindi non convergono ad un elemento di A .

Lemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme, e sia $x_0 \in \text{Clos}(A) \setminus A$ (quindi A non è chiuso). Allora esiste

$$A \ni a_n \rightarrow x_0$$

Dim. Poiché $x_0 \in \text{Clos}(A)$ avendo che
 $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.c. $x_0 - \varepsilon \leq a \leq x_0 + \varepsilon$
la usa con $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e trovo $a_k \in A$ t.c.



$$x_0 - \frac{1}{k} \leq a_k \leq x_0 + \frac{1}{k}$$

Per i carabinieri la successione $a_k \rightarrow x_0$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $A \quad \quad A$.

Def. (già data) Siano $U \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che U è aperto in A se

$$\forall x_0 \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \subseteq U$$

Oss. La definizione è equivalente a dire che ogni $x_0 \in U$ è interno ad U relativamente ad A

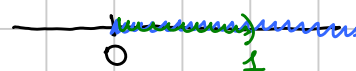
Oss. La definizione è equivalente a dire che esiste un aperto $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $U = B \cap A$

(detto brutalmente: gli aperti in A sono le intersezioni di A con gli aperti veri di $\mathbb{R}$)

Esempio $A = [0, +\infty)$, $U = [0, 1)$. Allora U è aperto in A .

È vero che $[0, 1)$ è intersezione di A con un aperto vero di $\mathbb{R}$, ad esempio

$$\underbrace{[0, 1)}_U = \underbrace{[0, +\infty)}_A \cap \underbrace{(-3, 1)}_B$$



Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto per ricoprimenti se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoric. finito.

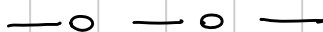
↑ costituito da un numero finito di piastelle

Def. Un ricoprimento aperto di A è una famiglia di insiemi $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che

(i) ogni U_i è aperto in A (per ogni $i \in I$)

$$(ii) \quad \bigcup_{i \in I} U_i = A$$

(ovviamente gli U_i si possono sovrapporre tra di loro)



TEOREMA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

Allora sono fatti equivalenti

- (i) A è compatto (chiuso + limitato)
 - (ii) A è compatto per successioni
 - (iii) A è compatto per ricoprimenti
-] visto precedentemente

Dam. che (iii) $\Rightarrow$ (i) Per ipotesi A è compatto per ricoprimento.
Tesi: A è chiuso e limitato.

Considero $U_n := (-n, n) \cap A \quad n \in \mathbb{N}$

Allora U_n è aperto in A (intersezione di A con aperto vero di $\mathbb{R}$)

Inoltre gli U_n ricoprono A :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = A$$

Per ipotesi basta un numero finito degli U_n per ricoprire A .
Ma allora A è contenuto in $(-n_0, n_0)$ per un qualche n_0 ,
quindi è limitato.

Sta ora $x_0 \in \text{Clos}(A)$. Considero



$$U_n = A \cap \underbrace{(\mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}])}_{\text{aperto in } \mathbb{R}} = \text{aperto in } A$$

Supponiamo che $x_0 \notin A$, cioè A non è chiuso. Allora le U_n ricoprono A . Ma allora ne basta un numero finito, cioè esiste n_0 t.c.



$$A \subseteq \mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}]$$

Basta prendere un raggio $0 < \epsilon < \frac{1}{n_0}$ e ho trovato un intervallo centrato in x_0 che non contiene pti di A ,
quindi x_0 non sta in $\text{Clos}(A)$.

— o — o —

Oss. Resta da fare che (i) $\Rightarrow$ (iii)

Perché 3 nozioni di compattezza? L'idea fondamentale è che

le funzioni continue mandano compatti in compatti

cioè se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e A è compatto, allora l'immagine $f(A)$ è compatta.

Questa è l'idea fondamentale di Weierstrass:

$\rightarrow A$ è compatto $\Rightarrow f(A)$ è compatto $\Rightarrow f(A)$ ammette max e min

$\uparrow$
prop. iniziale

$\uparrow$
qui sta il difficile di Weierstrass.

Ora, le funzioni continue in generale

- non mandano limitati in limitati
- non mandano chiusi in chiusi

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$

$(0, 1)$ è limitato, ma $f(0, 1) = (1, +\infty)$

$[1, +\infty)$ è chiuso, ma $f([1, +\infty)) = (0, 1]$ non è chiuso

— o — o —