

Le quattro facce della continuità

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in D$.

Cosa vuol dire che f è continua in x_0 ?

1 - Limite

2 - ε / δ

3 - Successioni

4 - "Topologica"

Def. 1 (Prima parte del corso) f è continua in x_0 se

- $x_0 \in \text{Isd}(D)$
- $x_0 \in D(D)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Def. 2 (ε / δ)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$
Non tolgo x_0

Oss. L'equivalenza tra Def. 1 e Def. 2 è un esercizio (occhio ai pti isolati e a $x = x_0$)

Def. 3 Si dice che f è continua per successioni in x_0 se per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ con $x_n \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Per la definizione topologica occorre aprire una parentesi.

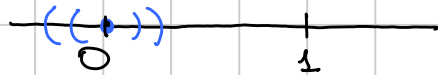
Siano $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Dico che x_0 è interno ad A nell'ambiente D , cioè limitandomi a D , se

$$\exists r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \subseteq A$$

Esempio discriminante $D = [0, +\infty)$ $A = [0, 1]$ $x_0 = 0$

È chiaro che x_0 NON è interno ad A .

Tuttavia x_0 è interno ad A relativamente all'ambiente D



Se guardo tutto relativamente a D , allora è come se buttassi via tutte le x negative.

Def. 1 Si dice che f è continua in x_0 se

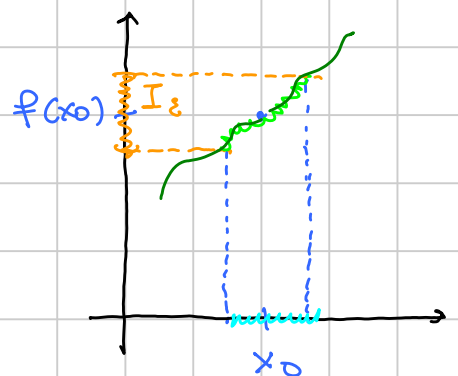
$\forall \varepsilon > 0$ posto $I_\varepsilon = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ si ha che

x_0 è interno a $f^{-1}(I_\varepsilon)$ relativamente a D .

↑
è equivalente a richiedere che

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \subseteq f^{-1}(I_\varepsilon)$$

— o — o —



Che cosa vuol dire che f è continua in D ? Che è continua in ogni pto ...

Def. 2 (ε/δ) $\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$$

Def. 3 (Successioni) $\forall x_0 \in D \quad \forall x_n \rightarrow x_0$ contenuta in D
 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Def. 4 (Topologica) $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto si ha che

$f^{-1}(A)$ è aperto relativamente a D

Equivalenza tra continuità ε/δ e continuità per successioni

Dim $\Rightarrow$ Ipotesi: f continua ε/δ in x_0

Tesi: se $x_n \rightarrow x_0$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Fisso $\varepsilon > 0$ e voglio dim. che $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ definitivamente.
Uso l'ipotesi e ottengo $\delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$$

Richiè $x_n \rightarrow x_0$, definitivamente $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$. $\square$

Dim $\Leftarrow$ Ipotesi: se $D \ni x_n \rightarrow x_0$ allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Tesi: continuità ε/δ

Per assurdo, quindi bisogna negare la tesi

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

NOT TESI: $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon_0$

Uso la NOT TESI con $\delta = \boxed{\frac{1}{k}}$. Trovo un pto x_k t.c.
 $\downarrow$
basta che $\rightarrow 0$

$$x_0 - \frac{1}{k} \leq x_k \leq x_0 + \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad |f(x_k) - f(x_0)| > \varepsilon_0$$

Ora passando al limite otteniamo $x_k \rightarrow x_0$ per i carabinieri
 e $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ per ipotesi. Ma allora $|0-0| \geq \varepsilon_0$
 e questo è assurdo.

— o — o —

Composizione di funzioni continue Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

sia $f: A \rightarrow B$, e sia $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

(in questo modo è garantita la composizione $g(f(x))$, $A \rightarrow \mathbb{R}$)

Supponiamo

(i) f continua in x_0

(ii) g continua in $f(x_0)$.

Allora

$g \circ f$ è continua in x_0

Dim. via continuità per successioni Prendo una qualunque
 succ. $x_n \rightarrow x_0$ e voglio dedurre che $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$.

Ma

$$\begin{array}{ccccccc} x_n & \rightarrow & x_0 & \Rightarrow & f(x_n) & \rightarrow & f(x_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) \\ \cap & & & \uparrow & \cap & & \uparrow \\ A & & & \text{continuità} & B & & \text{continuità} \\ & & & \text{di } f(x) & & & \text{di } g(x) \text{ in } \\ & & & \text{in } x_0 & & & f(x_0) \\ & & & & & & \text{— o — o —} \end{array}$$

Esercizio: Provare a fine la dimostrazione ε/δ , del tutto
 fattibile

Achtung! Occhio alla dimostrazione topologica. Dato $U \subseteq \mathbb{R}$
 aperto si ha

$g^{-1}(U)$ aperto e quindi $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$
 aperto

Aperto infatti è sempre relativo all'insieme di definizione.