

SUCCESIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA

Def. Una succ. a_n di numeri reali si dice succ. di CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$$

Brutalmente: definitivamente gli a_n stanno "vicini-vicini"

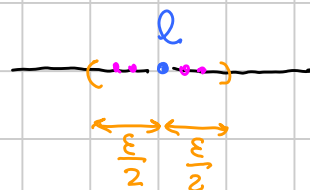
Prop. 1 Sia a_n una succ. che ha limite reale, cioè $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora a_n è una succ. di Cauchy.

Idea della dim.: essendo gli a_n vicini al limite, saranno anche vicini tra di loro

Dim. Uso la def. di Limite con $\frac{\varepsilon}{2}$.

Per ogni $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.}$

$$|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$



Allora lo stesso n_0 va bene nella def. di succ. di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0: \quad |a_n - a_m| &= |a_n - l + l - a_m| \\ &\leq |a_n - l| + |a_m - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Prop. 2 Sia a_n una succ. di Cauchy.

Allora a_n è limitata.

Dim.: Uso la def. di succ. di Cauchy con $\varepsilon = 1$

↑ basta un qualunque numero

$$\exists n_0 \text{ t.c. } |a_m - a_n| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

In particolare, prendendo $m = n_0$, si ottiene

$$|a_n - a_{n_0}| \leq 1$$



cioè $a_{n_0} - 1 \leq a_n \leq a_{n_0} + 1 \quad \forall n \geq n_0$

I termini precedenti sono un numero finito. Detto altrimenti

$$a_n \leq \max \{a_{n_0} + 1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \geq \min \{a_{n_0} - 1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

— o — o —

Prop. 3 Sia a_n una succ. di Cauchy.

Supponiamo che esista una s.succ. convergente, diciamo

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty$$

Allora tutta la successione tende a a_∞ , cioè $a_n \rightarrow a_\infty$

Idea: gli a_{n_k} stanno vicini ad a_∞ e si tirano dietro tutti gli altri.

Dim. Uso la defn. di succ. di Cauchy con $\frac{\varepsilon}{2}$. Otengo un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq n_0, \quad \forall n \geq n_0$$

Considero l'intervallo $[a_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, a_\infty + \frac{\varepsilon}{2}]$.



Poiché $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$, esistono infiniti indici

n per cui $a_n \in$ intervallo (quelli della s.succ. definitivamente)

In particolare esiste un indice $n_1 \geq n_0$ t.c.

$$|a_\infty - a_{n_1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendo $m = n_1$ nella def. di Cauchy otteniamo

$$|a_m - a_{n_1}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq n_1 \quad (\text{qui basterebbe } n_0)$$

In conclusione, per ogni $n \geq n_1$ si ha che

$$\begin{aligned} |a_n - a_\infty| &= |a_n - a_{n_1} + a_{n_1} - a_\infty| \\ &\leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a_\infty| \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{def. di Cauchy}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{scelta di } n_1} \\ &\quad \text{--- } 0 \quad \text{--- } 0 \quad \text{---} \end{aligned}$$

Teorema (Completezza dei numeri reali)

Sia a_n una succ. di Cauchy.

Allora per forza a_n ha limite reale, cioè $a_n \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$.

Dim. 1 Sono tre passi:

- ① Per la prop. 2 la successione è limitata
- ② Per B-W. ammette una s.succ. convergente
- ③ Per la prop. 3 tutta la succ. converge allo stesso limite.

Dim. 2 Per la proposizione 2 è limitata, quindi

$$l := \liminf a_n \in \mathbb{R}$$

$$L := \limsup a_n \in \mathbb{R}$$

Mi basta dimostrare che $l = L$. Dimostrerò che per ogni $\varepsilon > 0$

si ha che $L - l \leq 2\varepsilon$ e questo basta,

Fisso $\varepsilon > 0$. Uso la def. di succ. di Cauchy e ottengo $n_0 \in \mathbb{N}$ b.c.

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

Scelgo $m = n_0$ e ottengo che

$$|a_n - a_{n_0}| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

cioè

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora per confronto si avrà

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq l \leq L \leq a_{n_0} + \varepsilon$$

da cui $L - l \leq 2\varepsilon$. $\square$



Absoluta convergenza per serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Dim. 1 $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ + carabinieri per serie (vedi Vol. 1)
↑ via ordinamento

Dim. 2 Introduco le somme parziali
↑ via completezza

$$S_m := a_0 + a_1 + \dots + a_m$$

$$\hat{S}_m := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m|$$

Allora per ogni $m > n$ si ha che

$$\left. \begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_{n+1} + \dots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| \\ &= \hat{S}_m - \hat{S}_n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Se } \hat{S}_n \text{ è di Cauchy,} \\ \text{allora per forza } S_n \\ \text{è di Cauchy} \end{array}$$

Catena logica:

→ se $\sum |a_n|$ converge, allora $\hat{S}_n$ è una succ. di Cauchy

→ se $\hat{S}_n$ è di Cauchy, allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \hat{S}_m - \hat{S}_n \leq \varepsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

→ per la disuguaglianza di sopra, lo stesso vale per S_n , che quindi è di Cauchy

→ se S_n è di Cauchy, per il teorema di limite, quindi $\sum a_n$ converge.

— o — o —

Abbiamo visto:

Assioma di continuità $\rightsquigarrow$ Completezza dei numeri reali

MA VALE ANCHE IL VICEVERSA

cioè si può dimostrare l'assioma di continuità assumendo la completezza + la proprietà Archimedeo ($\forall r \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \text{ b.c. } n \geq r$)

Dim. Ipotesi: vale la completezza + Archimedeo

Tesi: per ogni A e B con A a sx di B esiste un c che sta in mezzo

Algoritmo:

→ Scelgo $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$

Guardo il p.to medio $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Se è un separatore ho vinto.

Se non lo è, ci sono due casi che si escludono avvicenda

- ci sono elementi di A maggiori

Pongo $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ $b_1 = b_0$

- ci sono elementi di B minori

Pongo

$$a_1 = a_0 \text{ e } b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$



Procedendo in questo modo trovo due successioni a_k e b_k t.c.

$$b \geq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall b \in B$$

$$a \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a \in A$$

★

per la Archimedeo.

Si verifica (esercizio) che a_k e b_k sono di Cauchy[↑], quindi convergono a qualcosa che è lo stesso nei 2 casi ed è il c che sto cercando.

Passando al limite di ★ per $k \rightarrow \infty$ si vede che il limite è il separatore richiesto.

— o — o —

Aggiunto dopo video: l'ultimo teo. richiede come ipotesi la proprietà Archimedeo.