

Teoremi di De L'Hôpital Casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Caso $\frac{0}{0}$ limite $x \rightarrow x_0^+$)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\tau > 0$. Siano

$$f: (x_0, x_0 + \tau) \rightarrow \mathbb{R} \quad g: (x_0, x_0 + \tau) \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni

(i) continue in $(x_0, x_0 + \tau)$ e derivabili in $(x_0, x_0 + \tau)$

(ii) supponiamo che $g'(x) \neq 0$ in $(x_0, x_0 + \tau)$

(iii) supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$$

Allora $g(x) \neq 0$ per $x \in (x_0, x_0 + \tau)$ e

$$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In particolare, se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora sono tutte uguali.

Dim. che $g(x) \neq 0$ in $(x_0, x_0 + \tau)$



Supponiamo per assurdo che $\exists x_1 \in (x_0, x_0 + \tau)$ t.c. $g(x_1) = 0$

Estendo $g(x)$ a tutto l'intervallo $[x_0, x_1]$ ponendo $g(x_0) = 0$.

Così facendo otterremo una funzione

$$\hat{g}: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definita come

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (x_0, x_1] \\ 0 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

La funzione $\hat{g}$ è continua in $[x_0, x_1]$ per via dell'ipotesi che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$. Inoltre $\hat{g}$ è derivabile in (x_0, x_1) e soddisfa $\hat{g}(x_0) = \hat{g}(x_1) = 0$.

Per Rolle esiste $c \in (x_0, x_1)$ b.c. $\hat{g}'(c) = g'(c) = 0$ il che è contro una delle ipotesi.

— o — o —

Dim H1

Basta dim. la disug. di dx

Basta dimostrarla nel caso in cui $\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$

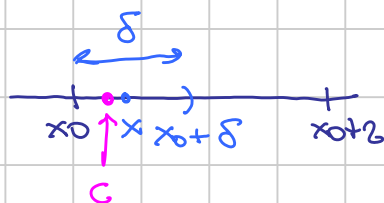
(il caso $L = +\infty$ è ovvio, il caso $L = -\infty$ ricade quello $L \in \mathbb{R}$).

Basta dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

Dunque fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione del $\limsup$ esiste $\delta > 0$ b.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$



Considero le estensioni $\hat{f}$ e $\hat{g}$ definite come sopra ponendo $\hat{f}(x_0) = \hat{g}(x_0) = 0$ e ho che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (anche c finisce nella stessa zona).
Passando al $\limsup$ ottengo

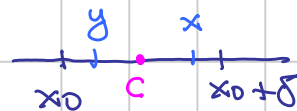
$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

— o — o —

Oss. Se $L = -\infty$, si fa lo stesso ragionamento dimostrando che

$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$$

Dim H2 Senza estendere Tutto uguale fino alla definizione di δ .



Comunque io prendo $x_0 < y < c < x < x_0 + \delta$
si avrà

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

$\uparrow$
Cauchy su $[x, y]$

Fisso x e faccio tendere $y \rightarrow x_0^+$. Ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \quad f(y) \rightarrow 0 \quad g(y) \rightarrow 0$$

Ora concludo facendo il $\limsup$ per $x \rightarrow x_0^+$.

— 0 — 0 —

Teorema (Caso $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \rightarrow x_0^+$).

Siano $f: (x_0, x_0 + 2) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: (x_0, x_0 + 2) \rightarrow \mathbb{R}$
continue e derivabili in $(x_0, x_0 + 2)$.

Supponiamo che $g'(x) \neq 0$ per $x \in (x_0, x_0 + 2)$.

Supponiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

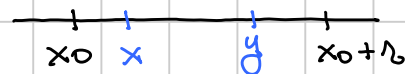
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$$

se ne può fare a meno

Allora vale la solita catena a 4 disuguaglianze

(È ovvio che posso dividere per $g(x)$ in quanto tendendo a $+\infty$ sarà $\neq 0$ in un intorno destro di x_0).

Brutal mode



$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \sim \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\uparrow$
 $f(x) \approx g(x)$
sono grandi

Dim H1 Come prima dimostro solo la disug dx.
Come prima fisso $\varepsilon > 0$ e trovo $\delta > 0$
b.c.

$$g(x) \neq 0 \quad \text{per } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$
$$f(x) \neq 0 \quad \text{per } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$



$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \quad \text{per } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Ora per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ ho che $x_0 < x < y < x_0 + \delta$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}}{\frac{f(x) - f(y)}{f(x)}}$$

$$= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

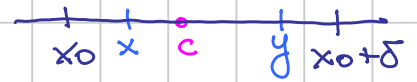
$$\leq (L + \varepsilon) \frac{1 - \boxed{\frac{g(y)}{g(x)}} \rightarrow 0}{1 - \boxed{\frac{f(y)}{f(x)}} \rightarrow 0}$$

Lascio fisso y e faccio $x \rightarrow x_0^+$ e quindi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon.$$

Oss. Ho usato che $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow +\infty$
Potevo usare anche $y = x_0 + \delta$.

Dim H2 Come prima fino a δ



Per ogni $x_0 < x < y < x_0 + \delta$ si ha

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

Per x vicino a x_0 (anzi per ogni x) il denominatore è > 0
quindi

$$f(x) - f(y) \leq (L + \varepsilon)(g(x) - g(y))$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(y) + f(y)}{g(x)} \leq \frac{(L + \varepsilon)(g(x) - g(y)) + f(y)}{g(x)} \\ &= (L + \varepsilon) \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)} \end{aligned}$$

Facendo il limsup per $x \rightarrow x_0^+$ al RHS viene $L + \varepsilon$.
— 0 — 0 —

Oss. Nella seconda dimostrazione ho usato solo che $g(x) \rightarrow +\infty$,
ma non ho usato che $f(x) \rightarrow +\infty$.