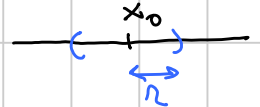


Nomenclatura topologica in $\mathbb{R}$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ (può essere o non essere in D). Si dice che

1 - x_0 è interno a D se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$$



↑ esiste intervallo tutto contenuto in D

2 - x_0 è aderente a D se

$$\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \neq \emptyset$$

ogni intervallo interseca D

3 - x_0 è di frontiera per D se

$$\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \neq \emptyset \text{ e } (x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset$$

ogni intervallo interseca sia D sia il complementare di D

4 - x_0 è isolato in D se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \cap D = \{x_0\}$$

esiste un intervallo in cui c'è solo x_0

5 - x_0 è di accumulazione per D se

$$\forall r > 0 \quad [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

(con ogni intervallo centrato in x_0 ci sono p.ti di $D \neq x_0$)

— o — o —

Esempio $D = [0, 1)$ $x_0 = 0$ è aderente, di frontiera, di accumulazione

$x_0 = 1$ pure

$x_0 = 1/5$ è interno

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Allora si chiama

1 - parte interna di D l'insieme dei p.ti interni: si indica con $\text{Int}(D)$ oppure $\overset{\circ}{D}$

2 - chiusura di D l'insieme dei p.ti aderenti
 $\text{Clos}(D)$ $\bar{D}$

3 - frontiera di D l'insieme dei p.ti di frontiera ∂D

4 - $\text{Isol}(D)$ = insieme dei p.ti isolati

5 - $D(D)$ = derivato di D = insieme dei p.ti di accumulazione
(insiemi dei p.ti in cui ha senso fare il limite)

Esempi $D = [0, 1)$. Allora

$$\text{Int}(D) = \overset{\circ}{D} = (0, 1)$$

$$\text{Clos}(D) = \bar{D} = [0, 1]$$

$$\partial D = \{0, 1\}$$

$$\text{Isol}(D) = \emptyset$$

$$D(D) = [0, 1]$$

$$A = \mathbb{Q}. \text{ Allora } \text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\text{Clos}(A) = \mathbb{R}$$

$$\partial(A) = \mathbb{R}$$

$$\text{Isol}(A) = \emptyset$$

$$D(A) = \mathbb{R}$$

$$B = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\}$$

$$\text{Int}(B) = (0, 1) \cup (1, 2)$$

$$\text{Clos}(B) = [0, 2] \cup \{3\}$$

$$\partial(B) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{Isol}(B) = \{3\}$$

$$D(B) = [0, 2]$$

L'esercizio Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ scrivo

$A, \text{Int}(A), \text{Clos}(\text{Int}(A)), \text{Int}(\text{Clos}(\text{Int}(A))), \dots$
 $\text{Clos}(A), \text{Int}(\text{Clos}(A)), \text{Clos}(\text{Int}(\text{Clos}(A))), \dots$

Quanti insiemi diversi posso ottenere?

Analogo: $A \rightarrow \partial(A) \rightarrow \partial(\partial(A)) \rightarrow \dots$
— o — o —

Proprietà immediate (esercizio)

$$\text{Int}(D) \subseteq D \subseteq \text{Clos}(D)$$

$$\text{Isol}(D) \subseteq D$$

$$\partial(D) \subseteq \text{Clos}(D)$$

$$\partial(D) = \text{Clos}(D) \setminus \text{Int}(D)$$

Dim. È ovvio che $\partial D \subseteq \text{Clos}(D)$.

Prendiamo un p.to $x_0 \in \text{Clos}(D)$. Ci sono due casi

- $\forall \epsilon > 0 \quad (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset$. Allora x_0 non è interno e sta sulla frontiera

- $\exists \epsilon > 0 \quad (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus D) = \emptyset$, quindi
 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$

quindi $x_0 \in \text{Int } D$,

$$\partial D \cap \text{Int}(D) = \emptyset$$

$\text{Clos}(D) = D(D) \cup \text{Isol}(D)$ e l'unione è
disgiunta.

— o — o —

Proprietà

Se $A \subseteq B$, allora

$$\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$$

$$\text{Clos}(A) \subseteq \text{Clos}(B)$$

Per la frontiera non ci sono inclusioni,

$$D(A) \subseteq D(B)$$

Unioni e intersezioni

$$\text{Clos}(A \cup B) = ?$$

$$\text{Clos}(A \cap B) = ?$$

$$\text{Int}(A \cup B) = ?$$

$$\text{Int}(A \cap B) = ?$$

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora A si dice

1 - aperto se $A = \text{Int}(A)$

2 - chiuso se $A = \text{Clos}(A)$

Unioni e intersezioni

1 - L'unione di 2 aperti è un aperto

2 - L'intersezione di 2 aperti è un aperto

3 - Idem per i chiusi

Famiglie infinite di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$ indica una famiglia di sottoinsiemi. È una funzione da un insieme di indici I (finito o infinito) a valori nei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Esempi $\{(x, x+3)\}_{x \in \mathbb{R}}$ è una famiglia di intervalli
 $\uparrow$
indici

Fatti ① L'unione qualunque di aperti è un aperto

Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è t.c. A_i è aperto per ogni $i \in I$, allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ è aperta}$$

② L'intersezione qualunque di chiusi è un chiuso

MA non valgono i viceversa, cioè unione qualunque di chiusi può non essere chiuso, e l'int. qualunque di aperti può non essere aperto

Esempi $\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = A_n$ sono intervalli chiusi

$$\bigcup_{n \geq 3} A_n = (0, 1) \text{ è aperto}$$



Burocratico: ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ lo posso scrivere come unione di chiusi

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

↑ i pt sono chiusi

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = B_n \text{ aperto}$$

$$\bigcap_{n \geq 1} B_n = \{0\} = \text{chiuso}$$

$$\left(-\frac{1}{n}, 7 + \frac{1}{n}\right) \leadsto \text{stessa cosa}$$

Oss. A è aperto $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ è chiuso

Topologia = dichiarare l'insieme degli aperti

Esercizio Trovare chiusi A_n , con $A_{n+1} \subseteq A_n$ tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \quad \text{e} \quad A_n \neq \emptyset \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Basta prendere $A_n = [n, +\infty)$

Non è possibile se sono limitati!!!!