

Esercizio 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup A = +\infty$.

Allora esiste una successione $\{x_n\} \subseteq A$ debolmente cresc. e tale che

$$x_n \rightarrow +\infty$$

Dim. La definisco induttivamente

- Scelgo $x_0 \in A$ a caso
- Supponendo di aver già definito $x_0, x_1, \dots, x_k$, scelgo $x_{k+1} \in A$ t.c.

$$x_{k+1} \geq x_k + 1$$

Perché lo trovo? Per definizione di $\sup A = +\infty$ per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$. Quindi basta prendere $M = x_k + 1$



Perché $x_k \rightarrow +\infty$? Perché per induzione dimostro che

$$x_k \geq x_0 + k$$

da cui concludo per confronto,

— o — o —

Esercizio 2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup A = L \in \mathbb{R}$.

Allora esiste una succ. $\{x_n\} \subseteq A$ debolmente crescente t.c.

$$x_n \rightarrow L$$

Dim. Per ogni $n \geq 1$ scelgo $\varepsilon = \frac{1}{n}$

e uso la caratterizzazione,

trovando $x_n \in A$ t.c.

↑
basta qualunque cosa
che tenda a 0.



$$L - \frac{1}{n} \leq x_n \leq L \quad . \quad \text{Da qui è ovvio che } x_n \rightarrow L$$

Così però non ho garantito che sia debolmente crescente.

Distinguiamo 2 casi:

Caso 1] $L \in A$. Allora prendo $x_n = L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Caso 2] $L \notin A$. Allora in questo posso prendere x_n addizionalmente strettamente crescente.

L'algoritmo è questo

- Scelgo x_0 a caso
- Supponendo di aver scelto $x_0, \dots, x_k$, prendo x_{k+1} in maniera tale che

$$x_k < x_{k+1}$$

$$L - \frac{1}{k} < x_{k+1}$$

Posso farlo perché uso la caratterizzazione con

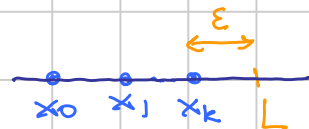
$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{k}, L - x_k \right\}$$

↑ basta qualunque cosa che tenda a 0.

e trovo di sicuro

$$L - \varepsilon < x_{k+1} < L$$

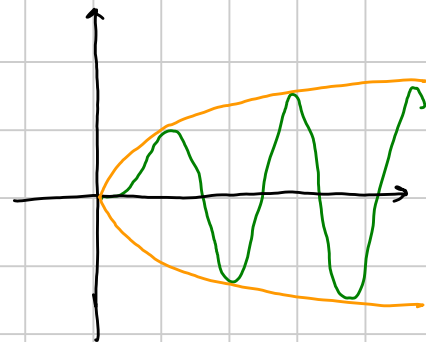
— 0 — 0 —



Esercizio 3 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \sin x \cdot \arctan x$

Idea! $\limsup = \frac{\pi}{2}$ $\liminf = -\frac{\pi}{2}$

Dimostrazione rigorosa!



① Disuguaglianza dall'alto

$$\sin x \cdot \arctan x \leq \arctan x$$

è limite

$$\Rightarrow \limsup_{x \rightarrow +\infty} \sin x \cdot \arctan x \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

② Successione dal basso Devo trovare $x_n \rightarrow +\infty$ t.c. $f(x_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Basta fare in modo che $\sin x_n = 1$, ad esempio $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Analogamente si fa il liminf.

Esercizio 4 $f(x) = \cos x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Basta osservare che

$$0 \leq |f(x)| \leq \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty}$$

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $\liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$, $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1$

Dimostro il liminf.

① Disuguaglianza dal basso: $\cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \geq -\cos x$
↑
vale in un intorno di 0 dove $\cos x \geq 0$

da cui per confronto $\liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq -1$

② Successione dall'alto: devo trovare $x_n \rightarrow 0^+$ t.c. $f(x_n) \rightarrow -1$
Basta fare in modo che $\sin \frac{1}{x_n} = -1$, quindi

$$\frac{1}{x_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \rightsquigarrow x_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0^+ \text{ e}$$

$$f(x_n) = \underbrace{\cos x_n}_{\rightarrow 0} (-1) \rightarrow -1$$

Esercizio 5 $f(x) = e^{x^2 \cos^2(x^3)}$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Per $\limsup = +\infty$ basta fare la succ. dal basso, cioè trovare $x_n \rightarrow +\infty$ t.c. $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Basta fare in modo che

$$\cos^2(x_n^3) = 1, \text{ ad esempio } x_n^3 = 2\pi n \quad x_n = \sqrt[3]{2\pi n} \rightarrow +\infty$$

Per il $\liminf$

① Disuguaglianza dal basso: $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
quindi $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 1$

② Successione dall'alto: devo trovare $x_n \rightarrow +\infty$ t.c. $f(x_n) \rightarrow 1$
Basta fare in modo che $\cos(x_n^3) = 0$, ad esempio
$$x_n^3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

e da qui si conclude.

— o — o —

Esercizio 6 Se $a_n \rightarrow a_\infty$ (quindi ha limite $a_\infty \in \mathbb{R}$), allora

$$\limsup (a_n + b_n) = a_\infty + \limsup b_n$$

(se uno dei 2 è limite, allora c'è la formula per $\limsup$ della somma)

Dim 1 Uso la definizione ponendo $c_n = a_n + b_n$ e introducendo i sup S_k^a, S_k^b, S_k^c . Allora

$$a_n \leq S_k^a \quad \forall n \geq k$$

$$b_n \leq S_k^b \quad \forall n \geq k$$

$$\text{e quindi } c_n \leq S_k^a + S_k^b \quad \forall n \geq k$$

quindi $S_k^c \leq S_k^a + S_k^b \quad \forall k$, ma allora passando al limite in k si arriva a

$$\limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

e da qui si ottiene una disuguaglianza, che già sapevamo

Ottenere quella opposta è più complicato.

Fisso $\varepsilon > 0$ allora per n abbastanza grande abbiamo

$$a_n \geq a_\infty - \varepsilon$$

quindi

$$c_n = a_n + b_n \geq a_\infty - \varepsilon + b_n$$

quindi

$$S_k^c \geq a_\infty - \varepsilon + S_k^b \quad \text{per } k \text{ abbastanza grande}$$

Passando al limite in k otteniamo

$$\limsup (a_n + b_n) \geq a_\infty - \varepsilon + \limsup b_n$$

Essendo ε arbitrario abbiamo la disuguaglianza voluta.

Dim. 2 Dal teorema generale otteniamo la stima dall'alto

$$\limsup (a_n + b_n) \leq a_\infty + \limsup b_n$$

Per la disuguaglianza opposta uso la successione dal basso.

Sappiamo per ipotesi che esiste $b_{i_m} \rightarrow \limsup b_n$.

Ma allora uso la stessa s.succ. c e ottengo

$$c_{i_m} = \underset{\downarrow a_\infty}{a_{i_m}} + b_{i_m} \rightarrow a_\infty + \limsup b_n$$

quindi

$$\limsup (a_n + b_n) \geq a_\infty + \limsup b_n$$